Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2014/15
11.12.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$

b) $f(z) = \dfrac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 2$

c) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** und in **c)** die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus. In **b)** hilft $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{42}\left(\left(1+\frac{42}{x}\right)^{42} - 1\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x}{x^2-x-6}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \qquad (a>0 \text{ fest})$

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$

Aufgabe 3

Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \in [0,2].$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g : [a,b] \to [a,b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = x_0$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

c) Nun sei $y_0 \in [0,2]$ gegeben. Die Folge (y_n) wird rekursiv definiert durch $y_{n+1} := f(y_n)$. Konvergiert diese Folge?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

b) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1) \end{cases}$

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.