

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
10. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Grenzwerte.

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$                       ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}\right)$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Abschätzung

$$x \ln x - y \ln y \leq (x - y)(1 + \ln x) \quad \text{für } x > y > 0.$$

**Aufgabe 2**

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen  $e^\pi$ ,  $\pi^e$  die größere ist.

**Aufgabe 3**

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch  $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$ .

- a) Beweisen Sie, dass  $f$  injektiv ist, und zeigen Sie  $f'(x) = 1 - (f(x))^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von  $f$ .
- c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von  $f^{-1}$  und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von  $f^{-1}$ .
- d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von  $f$  in  $x_0 = 0$  sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von  $f^{-1}$  in  $y_0 = -\frac{3}{5}$ .

**Aufgabe 4**

Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  mit  $f(x) := x + \sin(x) \cos(x)$  und  $g(x) := f(x)e^{\sin x}$ .

**Aufgabe 5**

Bestimmen Sie die Grenzwerte

- i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin^2 3x)}{x \cdot (\sin 2x)}$ .
- ii)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1}{(\tan x)^{\frac{1}{2}} - 1}$ .