Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2014/15
29.01.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

a) $\big\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\big|\, \exists C > 0\, \forall j \in \mathbb{N}:\ |x_j| \leqslant C\big\}$

b) $\big\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\big|\, f(0) = 0\big\}$

c) $\big\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\big|\, f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\big\}$

d) $\big\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\big|\, f \text{ ist surjektiv}\big\}$

Aufgabe 2

In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sowie linear unabhängige Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_m$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig.

b) $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) = \{0\}$.

Aufgabe 3

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

i) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig.

ii) Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Vergleichen Sie die Vektorräume:

$$\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3), \qquad \operatorname{lin}(v_1, v_2), \qquad \operatorname{lin}(v_1, v_3), \qquad \operatorname{lin}(v_2, v_3).$$

b) Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern) die Zeilennormalform und den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$