Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Menge all derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\{x : x \in S_1 \wedge x \in P\} = S_1 \cap P.$$

b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsemester sind, aber nicht Elektrotechnik studieren, ist gleich

$$\{x : (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\} = \{x : x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\{x : x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \ldots\} = \{x : \exists j \in \mathbb{N} : x \in S_j\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j.$$

Aufgabe 2

Gegeben seien eine Menge M sowie Teilmengen M_1, M_2, M_3 von M.

a) Um die Äquivalenz $M_1 \subset M_2 \Leftrightarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Implikationen $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ und $M_1 \subset M_2 \Leftarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ nach.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $M_1 \subset M_2$, sei also jedes Element von M_1 auch in M_2 enthalten. Wir müssen nun zeigen: $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ (bzw. in Worten: Jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, liegt auch nicht in M_1.)
Jedes Element der Menge $M \setminus M_2$ ist nicht in M_2 und damit erst recht nicht in M_1; folglich liegt es in $M \setminus M_1$. Also gilt $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$.

„$\Leftarrow$“: Es gelte $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$.
Nach der Voraussetzung $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ liegt jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, auch nicht in M_1. Dann ist notwendigerweise jedes Element von M_1 auch in M_2, da es ja sonst nicht in M_1 liegen würde. Also ist $M_1 \subset M_2$.

b) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.

Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.

c) Die Äquivalenz der drei Aussagen i), ii), iii) erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)“.

„i) $\Rightarrow$ ii)“: Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$.

„ii) $\Rightarrow$ iii)“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen. Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„iii) $\Rightarrow$ i)“: Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.

Aufgabe 3

a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
|x-4| = |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 10x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1]$, $x \in (-1, 4]$, $x \in (4, \infty)$ durchzuführen, um die Beträge aufzulösen…

b) $|2x| > |5 - 2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$
\begin{aligned}
|2x| > |5-2x| \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

c) Es ist

$$
\begin{aligned}
&|2 - |2-x|| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2 - |2-x| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant -|2-x| \leqslant -1 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 \leqslant |2-x| \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant 2 - x \leqslant 3 \;\text{ oder }\; -3 \leqslant 2 - x \leqslant -1 \\
\Leftrightarrow \quad & -1 \leqslant -x \leqslant 1 \;\text{ oder }\; -5 \leqslant -x \leqslant -3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{oder} \quad 3 \leqslant x \leqslant 5 \\
\Leftrightarrow \quad & x \in [-1, 1] \cup [3, 5].
\end{aligned}
$$

d) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x\Big(x^2 - x + \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x\underbrace{\Big[\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big]}_{\geqslant \frac{1}{2} > 0} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.
\end{aligned}
$$

2. Fall: $x \geqslant 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1+x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big(x^2 + x - \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1\Big] \\
&\Leftrightarrow \quad 4x > 0 \;\text{ und }\; \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \;\text{ und }\; \Big|x + \frac{1}{2}\Big| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \;\text{ und }\; \Big(x + \frac{1}{2} > 1 \;\text{ oder }\; x + \frac{1}{2} < -1\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \;\text{ und }\; \Big(x > \frac{1}{2} \;\text{ oder }\; x < -\frac{3}{2}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leqslant 1 + |x+y| \leqslant 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1+|x+y|} \geqslant \frac{1}{1+|x|+|y|} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+|x+y|} \leqslant -\frac{1}{1+|x|+|y|} \tag{1}$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|} \overset{(1)}{\leqslant} 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned}
&|x| + |y| \geqslant |x| \geqslant 0 \\
\Rightarrow\; &1 + |x| + |y| \geqslant 1 + |x| \geqslant 1 > 0 \\
\Rightarrow\; &\frac{1}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{1}{1+|x|} \\
\overset{|x|\geqslant 0}{\Rightarrow}\; &\frac{|x|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|}.
\end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geqslant 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geqslant y$. Dann ist $|x-y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\}, \\
\frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}.
\end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x-y| = -(x-y) = -x+y$, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\},\\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24-18i-8i+6i^2 = 18-26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2+(-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2+(-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10}+\frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z\cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z\cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z\cdot w| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z|\cdot|w|$.

d) Es ist $\overline{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i}\cdot\frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i.$$

$\overline{z}^2+1/w^2 = (8+6i)+(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\overline{z}^2+1/w^2$ lautet $|\overline{z}^2+1/w^2| = \sqrt{197^2+154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.