Karlsruhe Institute für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis 23.10.2018
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

## 2. Übungsblatt

### Aufgabe 1

Für $i \in \{1,2,3\}$ seien die Abbildungen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad f_3(x) = x^2 + x + 1.$$

**a)** Bestimmen Sie für jede Abbildung $f_i$ den maximalen Definitionsbereich $D_i \subset \mathbb{R}$ sowie den Bildbereich $f_i(D_i)$.

**b)** Welche Abbildungen sind injektiv? Geben Sie zu den injektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an.

**c)** Welche Kompositionen $f_i \circ f_j$ sind erlaubt? Ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ erlaubt?

**d)** Geben Sie die Abbildung $f_1 \circ f_2$ explizit an.

**e)** Für die Abbildung $f_1$ finden Sie das Urbild des Intervalls $[2,3]$.

### Aufgabe 2

Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{2,4,7\}$ und $M_2 = \{2,4,8,9\}$. Geben Sie jeweils eine injektive, eine nicht injektive, eine surjektive und eine nicht surjektive Abbildung von $M_1$ nach $M_2$ bzw. von $M_2$ nach $M_1$ an. Existieren auch bijektive Abbildungen?

### Aufgabe 3

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. von $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$?

**a)** $\left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \middle| \exists C > 0\, \forall j \in \mathbb{N} : \ f(j) \leqslant C \right\}$

**b)** $\left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f(0) = 0 \right\}$

**c)** $\left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ hat mind. eine Nullstelle} \right\}$

**d)** $\left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ ist surjektiv} \right\}$

### Aufgabe 4

Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_1, V_2$ seien Untervektorräume von $V$. Zeigen Sie:

**a)** $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von $V$.

**b)** $V_1 \cup V_2$ ist im allgemeinen kein Untervektorraum von $V$.

**c)** $V_1 + V_2 := \left\{ v_1 + v_2 \,\middle|\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $V$.

## Aufgabe 5

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

**a)** Jede Menge $M$ von Vektoren aus $V$ mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

**b)** Ist $M := \{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus $M$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus $M$ darstellen.

**c)** Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

**d)** Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

**e)** Sind $v_1, v_2$ linear unabhängig und sind $v_1, v_3$ linear unabhängig, so sind auch $v_2, v_3$ linear unabhängig.

## Aufgabe 6

**a)** Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

**i)** Die Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_3$ sind linear abhängig.

**ii)** Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

**b)** Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

**Hinweis** In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3, und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.