Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Der Ausdruck $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, also $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Der maximale Definitionsbereich von $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist ebenfalls $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Polynome wie $f_3(x) = x^2 + x + 1$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also $D_3 = \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung der Bildmenge $f_1(D_1)$ von f_1 setzen wir die Abbildung f_1 aus zwei Abbildungen zusammen. Seien

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x - 1.$$

Dann sind sowohl s als auch t_{-1} bijektiv [s injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow 1/x_1 \neq 1/x_2 \Rightarrow s(x_1) \neq s(x_2)$; s surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := 1/y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $s(x) = s(1/y) = y$. t_{-1} injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow t_{-1}(x_1) \neq t_{-1}(x_2)$; t_{-1} surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := y + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $t_{-1}(x) = t_{-1}(y+1) = (y+1) - 1 = y$.] Nach Aufgabe 6 b) i) vom 1. Übungsblatt ist $s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv. ($s \circ t_{-1}$ ist erlaubt, weil $t_{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und s hierauf definiert ist!) Da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s \circ t_{-1}(x) = s(t_{-1}(x)) = s(x-1) = \frac{1}{x-1} = f_1(x)$$

gilt, folgt

$$f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = (s \circ t_{-1})(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist folgende Umformung sehr hilfreich

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2 \cdot f_1(x) \qquad \text{für } x \neq 1. \tag{1}$$

Wegen

$$\begin{aligned} y \in f_2(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \; y = f_2(x) \overset{(1)}{=} 1 + 2 \cdot f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \; \frac{y-1}{2} = f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{2} \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

gilt $f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bei $f_3(x) = x^2 + x + 1$ ist eine quadratische Ergänzung günstig:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Der Graph der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + \frac{1}{2})^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, ihr Bildbereich ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Für die Bildmenge von f_3 erhalten wir

$$f_3(D_3) = \left\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant \frac{3}{4}\right\} = \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

b) Im a)-Teil haben wir bereits gesehen, dass f_1 injektiv ist. Alternativ: f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in D_1$ mit $x \neq y$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad x-1 \neq y-1 \quad \overset{x,y \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_2(y).$$

Die Abbildung f_2 ist ebenfalls injektiv. Dies folgt aus der Injektivität von f_1 und (1), denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2 \cdot f_1(x) \neq 1 + 2 \cdot f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y).$$

Wegen $f_3(-1) = 1 = f_3(0)$ ist f_3 nicht injektiv.

Nun zu den Umkehrabbildungen: Eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ besitzt keine Umkehrabbildung, wenn die Zielmenge Y echt größer als die Bildmenge $f(X)$ ist. Wir betrachten daher die Abbildung $f : X \to f(X)$ (diese ist automatisch surjektiv!); dies ist eine bijektive Abbildung, welche wir umkehren können. Im folgenden seien also $f_i : D_i \to f_i(D_i)$.

Die Umkehrabbildung von $f_1 = s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nach Satz 3.6 gegeben durch

$$(f_1)^{-1} = (s \circ t_{-1})^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1}.$$

Definieren wir

$$t_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto x + 1,$$

so sind die Abbildungen t_{-1} und t_1 einander invers, denn es gilt

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_{-1}(x) &= t_1(t_{-1}(x)) = t_1(x-1) = (x-1) + 1 = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ t_{-1} \circ t_1(x) &= t_{-1}(t_1(x)) = t_{-1}(x+1) = (x+1) - 1 = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung s ist wegen $s \circ s(x) = s(s(x)) = \frac{1}{1/x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu sich selbst invers, d.h. $s^{-1} = s$. Hiermit erhalten wir

$$(f_1)^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1} = t_1 \circ s,$$

also

$$(f_1)^{-1} : f_1(D_1) \to D_1, \quad y \mapsto (t_1 \circ s)(y) = t_1(s(y)) = t_1(\frac{1}{y}) = \frac{1}{y} + 1 = \frac{1+y}{y}.$$

Zur Bestimmung von $(f_2)^{-1}$ lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$):

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} = y \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 = y(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x(1-y) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{y+1}{y-1} = f_2(y). \end{aligned}$$

Also ist f_2 ihre eigene Umkehrabbildung: $(f_2)^{-1} = f_2$.

c) Erlaubt sind genau die Kompositionen $f_i \circ f_j$ mit $f_j(D_j) \subset D_i$. Hier sind dies:

$$f_3 \circ f_1, \quad f_3 \circ f_2, \quad f_3 \circ f_3, \quad f_2 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_2.$$

Alle anderen sind nicht erlaubt.

Wegen $2 \in f(D_3)$ und $f_1(2) = 1$, aber $1 \notin D_2$ ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ nicht erlaubt.

d) Es ist

$$f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(f_2(x)) = f_1\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x-1}} = \frac{x-1}{2}.$$

e) Das Urbild ist das Intervall $[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$.

Aufgabe 2

Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1 : M_1 \to M_2$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$. Nicht injektiv ist z.B. $f_2 : M_1 \to M_2$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M_1 nach M_2 gibt es nicht, weil M_2 mehr Elemente als M_1 enthält.
Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung $M_2 \to M_1$. Ist etwa $g_1 : M_2 \to M_1$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$ und $9 \mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2 : M_2 \to M_1$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2$, $8 \mapsto 4$ und $9 \mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

Aufgabe 3

a) Um zu zeigen, dass $A := \big\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\big|\; \exists C > 0\ \forall j \in \mathbb{N} : \ |x_j| \leqslant C\big\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist, verwenden wir den Satz aus der Vorlesung:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $(0)_{j\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \ldots) \in A$. (Nehme z.B. $C = 1$)

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_j), (y_j) \in A$. Dann gibt es $C, C' > 0$ mit $|x_j| \leqslant C$ und $|y_j| \leqslant C'$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Daher gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

1) $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| \leqslant C + C'$, d.h. $(x_j) + (y_j) \in A$;

2) $|\alpha x_j| = |\alpha| \cdot |x_j| \leqslant C|\alpha| \leqslant C|\alpha| + 1 =: \tilde{C}$ (damit $\tilde{C} > 0$), also $\alpha(x_j) \in A$.

b) Wie zuvor benutzen wir den Satz aus der Vorlesung, um zu begründen, dass $B := \big\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\big|\; f(0) = 0\big\}$ ein Untervektorraum von $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, also $f + g \in B$;

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, also $\alpha f \in B$.

c) $C := \big\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\big|\; f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\big\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, jedoch nicht.

d) $D := \big\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \;\big|\; f \text{ ist surjektiv}\big\}$ ist kein Untervektorraum von $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum von $\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V.

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 \cap V_2$, also $x, y \in V_1$ sowie $x, y \in V_2$. Dann gilt

1) $x+y \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $x+y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $x+y \in V_1 \cap V_2$.

2) $\alpha x \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $\alpha y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

Nun verwende man Satz aus der Vorlesung.

b) Gegenbeispiel: Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch die Einheitsvektoren $e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorräume

$$V_1 := \operatorname{lin}(\{e_1\}) = \{\alpha e_1 : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sowie} \qquad V_2 := \operatorname{lin}(\{e_2\}) = \{\beta e_2 : \ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist $V_1 \cup V_2$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition: In $V_1 \cup V_2$ liegen e_1 und e_2, nicht aber der Vektor $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

c) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $V_1 + V_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Dann gibt es $x_1, y_1 \in V_1$ sowie $x_2, y_2 \in V_2$ mit $x = x_1 + x_2$ bzw. mit $y = y_1 + y_2$. Es folgt

$$\alpha x + y = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + y_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2\,.$$

Also gilt $\alpha x + y \in V_1 + V_2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Insbesondere sind dann $x + y \in V_1 + V_2$ [mit $\alpha = 1$] sowie $\alpha x \in V_1 + V_2$ [mit $y = 0$].

Nun benutze man Satz aus der Vorlesung.

Aufgabe 5

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

a) Ist $M \subset V$ mit $0 \in M$, so gilt $\operatorname{lin}(M) = \operatorname{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

b) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ linear abhängig, jedoch kann $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination des Nullvektors $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dargestellt werden, d.h. es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. [Weiteres Gegenbeispiel siehe Aufgabe 5 a)]

c) Existiert ein Vektor $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (d.h. es gibt eindeutige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$), so wird auch der Nullvektor $0 = v - v$ eindeutig dargestellt. Folglich lässt sich der Nullvektor nur als tiviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen. Also sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Wählt man $v := \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, so sind die Vektoren $v_1 + v = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $v_2 + v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ linear abhängig, denn es gilt $0 \cdot (v_1 + v) + 1 \cdot (v_2 + v) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

e) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{C}^2$. Dort sind $v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Außerdem sind v_1 und $v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Die Vektoren v_2 und v_3 sind jedoch nicht linear unabhängig, denn es gilt $v_2 - v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Aufgabe 6

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es v_1, v_2, v_3 auch.

ii) Wäre $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, also mit

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \alpha_1 & & + \alpha_3 a & = & 0 \\ & \alpha_2 & + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - \alpha_2 & + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & -a\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & = & -2\alpha_3 \end{array} \right.$$

Nur für $a = 2$ gibt es eine Lösung, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$).

Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 nur für $a = 2$ linear abhängig.