Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen $\leqslant 0$ ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leqslant 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste

$$\forall x \in (0, 42] : \quad x + \frac{1}{x} \leqslant \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

d) Wir setzen $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $x^2(1+x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von D existieren, und es ist $\inf D = \min D = 0$.

Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d.h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

Aufgabe 2

Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.
Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leqslant \alpha$ und $b \leqslant \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leqslant \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \leqslant \alpha + \beta$ ist, d.h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.
Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d.h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$. Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d.h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.
Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup\big(-(A+B)\big) = -\sup\big((-A)+(-B)\big) = -\big(\sup(-A)+\sup(-B)\big) \\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\text{a)}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

b) IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{1}(1+\frac{1}{k})^k = (1+\frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k &= \Bigg(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k\Bigg) \cdot \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Big(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}.\end{aligned}$$

c) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25 \\ &\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = (\underbrace{6 \cdot l + 5n - 5}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot 5.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. (IV)

Für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n\cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $w \neq z$ und $z \neq 0$, so setzen wir $q := \frac{w}{z}$. Dann ist $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und laut a) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{w}{z}\Big)^k = \frac{1-(\frac{w}{z})^n}{1-\frac{w}{z}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(1-\frac{w}{z}\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{w}{z}\Big)^k = 1 - \Big(\frac{w}{z}\Big)^n \\ &\overset{|\cdot z^n (\neq 0!)}{\Leftrightarrow} \quad z\Big(1-\frac{w}{z}\Big)\, z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}w^k = z^n - w^n \\ &\Leftrightarrow \quad (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}w^k = z^n - w^n.\end{aligned}$$

Im Fall $w = z$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr.

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0,\ \text{da } n-1-k\geqslant 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)} w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = w^{n-1}$$

ist die Gleichung im Fall $z = 0$

$$(0-w)\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = -w \cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n$$

ebenfalls für jedes $w \in \mathbb{C}$ erfüllt.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{l+1} = \frac{i}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{l} \overset{\text{a)}}{=} \frac{i}{2}\cdot\frac{1-(i/2)^n}{1-i/2}\cdot\frac{1+i/2}{1+i/2} \\
&= \frac{i}{2}\cdot\frac{1-(i/2)^n+i/2-(i/2)^{n+1}}{1-i^2/4} = \frac{i}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\Big(1-(i/2)^n+i/2-(i/2)^{n+1}\Big) \\
&= \frac{2}{5}\,i\,\Big(1+i/2\Big) + \frac{2}{5}\,i\,\Big(-(i/2)^n-(i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,i\,\Big(-1-i/2\Big)(i/2)^n \\
&= \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i^n}{2^n}.
\end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,1,2,3\}$ mit $n = 4m+r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m}\cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n} + i\,\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n}}\Big).$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n}} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}} + i\,\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n}}\Big).$$

Wir lesen ab:

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k\right) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe 5

Es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $x, y \in [0, \infty)$. Für $x = 0$ ist die behauptete Aussage klar. Für $x > 0$ ergibt sich

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \leqslant 0 \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \leqslant 0 \quad \overset{2\text{ b)}}{\Leftrightarrow} \quad x^n - y^n \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

Zur Äquivalenz in $(*)$: Wegen $x > 0$ und $y \geqslant 0$ ist $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \geqslant x^{n-1} > 0$.