Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2018/19
07.11.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\left\{x^2 - x + 2 \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $\left\{x + \dfrac{1}{x} \,:\, 0 < x \leqslant 42\right\}$

d) $\left\{\dfrac{x^2}{1+x^2} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 2

Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $A + B := \{a + b \,:\, a \in A \text{ und } b \in B\} = \{x \,:\, \exists\, a \in A, b \in B \,:\, x = a + b\}$ eine beschränkte Menge ist und

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \text{sowie} \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

gelten.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$;

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$;

c) $6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar.

Aufgabe 4

a) Beweisen Sie die geometrische Summenformel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

b) Folgern Sie hieraus, dass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1a), 1b), 3b), 3c), und 4**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.