

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
5. Übungsblatt

**Aufgabe 1**

- a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:
- i)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat genau die Zahlen 1 und  $-1$  als Häufungswerte.
  - ii)  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.
  - iii)  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
  - iv)  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen 2018, aber nicht monoton.
  - v)  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht.
- b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt so, dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:
- i)  $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ ;    ii)  $|a_n| < 2\varepsilon^2$ ;    iii)  $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$ ;    iv)  $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon$ ;
  - v)  $|a_n a_m| < \varepsilon$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 2**

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und geben Sie  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$  an.

a)  $a_n = (1 + (-1)^n)^n$       b)  $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n + 1)/n, & n = 3k - 2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

**Aufgabe 3**

Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen Wert  $a$  konvergiert, und geben Sie zu  $\varepsilon = 10^{-10}$  ein  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  an so, dass für alle  $n \geq n_0$  stets  $|a_n - a| < \varepsilon$  gilt:

a)  $a_n = \frac{2n}{n+1}$ ;      b)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}}$ .

**Aufgabe 4**

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a)  $a_n = \frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3}$       b)  $a_n = (-1)^n + 1/n$

c)  $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$       d)  $a_n = \frac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e)  $a_n = n^4 \left( \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1 \right)$       f)  $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

### Aufgabe 5

- a) Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := a_n \cdot b_n$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Nun seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Konvergiert die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := a_n \cdot b_n$ ? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

### Aufgabe 6

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

**Hinweis** In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 4, und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.