

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt**

Aufgabe 1

a) Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$. Wegen

$$a_n = \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3n}}{3^{2n}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^n}{(3^2)^n} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^n$$

gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n = -\frac{1}{6} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n - 1 \right] \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{1 - (-8/9)} - 1 \right] = \frac{4}{51}.$$

b) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; wegen $|\frac{3}{4}| < 1$ ist sie konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

c) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^N \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^N \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ und hat den Wert 1.

Aufgabe 2

a) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n = (1+1)^n \geq 1+n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n} \leq 2$. Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \right| \leq \frac{2}{n!} =: b_n.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium.

b) Für $n \geq 3$ ist der Nenner positiv und es gilt

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geq \frac{n+0}{n^2+0} = \frac{1}{n} \geq 0.$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

- c) Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3(n+1) + (-1)^{n+1}}{3n + (-1)^n} \geq 1 \Leftrightarrow 3 \geq (-1)^n - (-1)^{n+1} \Leftrightarrow 3 \geq 2(-1)^n.$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n + (-1)^n} \geq \frac{1}{3n + n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent.

- d) Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \quad i^{4m-2} = -1, \quad i^{4m-1} = -i, \quad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{4N} \frac{i^n}{n} &= \sum_{m=1}^N \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m} \right) \\ &= i \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1} \right) + \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2} \right) \\ &= i \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4N-3} - \frac{1}{4N-1} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4N} - \frac{1}{4N-2} \right) \\ &= i \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{1}{2k}. \end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergieren diese Summen für $N \rightarrow \infty$. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N -te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N \rightarrow \infty$. Für $m \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$s_{4N+m} = s_{4N} + \sum_{n=4N+1}^{4N+m} \frac{i^n}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} s_{4N}$$

wegen $|i^n/n| = 1/n$. Folglich konvergiert s_N für $N \rightarrow \infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 3

- a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

- b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^N \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N -te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $(\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})_{N \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leq C - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rightarrow \infty$ für $N \rightarrow \infty$ folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\infty$, d.h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

- c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.