Krlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für $n \geqslant 3$ gilt $\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n \leqslant (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ absolut konvergent.

b) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)}.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$. Das Quotientenkriterium liefert, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Aufgabe 2

Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2\cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.
Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geqslant \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 3

Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sowie $b_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil (b_n) eine monoton fallende Nullfolge ist.
Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\cdot\sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\,\sqrt{b} \leqslant \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\cdot\sqrt{k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\
&= \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \to 2 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent .

Aufgabe 4

Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$
A \;=\; \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -\frac{1}{3}Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{3}Z_1 \\ Z_3 \to -\frac{1}{2}Z_3 + \frac{1}{3}Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + \frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab:

$$
\text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}.
$$

Folglich ist $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von Kern A und es gilt dim Kern $A = 1$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ Bild A linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$
\text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.
$$