

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt**

Aufgabe 1

a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z} (E(z) - 1).$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1, \quad f(z) = E(z) - \frac{2E(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)E(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0).$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+1} = (z+1) \sin(z+1).$$

Aufgabe 2

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} (-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn die Reihe alternierend ist, die Folge a_n eine Nullfolge ist und

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞ , d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

- c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|e^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e, & n \text{ gerade,} \\ e^{0/2n} = 1, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1} . Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} = e^{2n} e^{-2n} = 1 \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2} , d. h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

- d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.
- e) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left| \frac{(z+3i)^n}{n^2} \right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leq 1$.