

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ b) $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$
c) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ d) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0 . Wie groß ist der Konvergenzradius?

- a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$ b) $f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 2$
c) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** und in **c)** die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus. In **b)** hilft $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{42} \left(\left(1 + \frac{42}{x} \right)^{42} - 1 \right)$
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0 \text{ fest})$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right)$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$

Aufgabe 4

- a) Bestimmen Sie alle $x \in (0, \infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ erfüllen.
b) Zeigen Sie: Die Ungleichung $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Die Funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \quad x \in [0, 2].$$

- a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) = x_0$.
- b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.
- c) Nun sei $y_0 \in [0, 2]$ gegeben. Die Folge (y_n) wird rekursiv definiert durch $y_{n+1} := f(y_n)$. Konvergiert diese Folge?

Aufgabe 6

- a) Es sei $a \in (0, \infty)$. Die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$x_0 := a, \quad x_n := \sqrt{x_{n-1}}, \quad y_n := 2^n(x_n - 1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\ln a$.

- b) Beweisen Sie für alle $x, y \in (0, \infty)$ die Abschätzung $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}$.
- c) Zeigen Sie, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $x \neq 1$ gilt.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3e), 3f), 3g), 4, 5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.