Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen, die aber einfach ignoriert werden dürfen). Diese Treppe verläuft nicht regelmäßig. Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick. In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen! Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0\ldots0 \ -1 \ 0\ldots0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums, und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung! Laut der Vorlesung ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda + 2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1 + 4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2

Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha^2 & 2 - \alpha \end{array}\right) =: (*)$$

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2-\alpha)/(\beta - \alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta - \alpha^2)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 - (2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Man sieht: In diesem Fall ist das Gleichungssystem $Ax = y$ eindeutig lösbar; die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ in diesem Fall keine Lösung.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $Ax = y$ ist

$$x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt [oder den (-1)-Ergänzungstrick verwendet]:

$$x_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = y$ ist folglich

$$x = x_p + x_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Aufgabe 3

Definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -c-i \\ c^2+2ci \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} i \\ i-1+c \\ -c-i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind alle $c \in \mathbb{C}$, für welche das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^{4} x_j v_j = y$ eine Lösung $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ hat. Wir wenden Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ i & -1-i & -i & i-1+c & 5i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 2 & 0 & c^2+2ci & 2i & c^2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - iZ_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + cZ_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1 \\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+3ci-2 \end{array}\right)$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist unlösbar für $0 \neq c^2 + 3ci - 2 = (c+i)(c+2i)$, also für $c \in \mathbb{C} \setminus \{-2i, -i\}$. Wegen der dritten Zeile ist die Lösungsmenge auch für $c = -2i$ leer. Nur im Fall $c = -i$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar. Fazit: Genau für $c = -i$ gilt $y \in U$.

Aufgabe 4

Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 + 5Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_3]{Z_4 \to Z_4 - 6Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + 2Z_1]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{permutieren}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.