Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2018/19

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist als Komposition stetiger Funktionen überall dort stetig, wo sie definiert ist, d.h. außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners — vorausgesetzt, der Bruch ist vollständig gekürzt! Hier haben wir $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$. Also ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig und daher ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ stetig. Nun gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = f(1)$, also ist f auch in der Stelle 1 stetig. Da aber 3 eine Nullstelle des Nenners im vollständig gekürzten Bruch $\frac{x-2}{x-3}$ ist, existiert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-3}$ nicht, und f ist in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

b) Wegen $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ positv, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5)$ negativ und x^3 positiv, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [0,3]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2+2x-15 \leqslant 1+0-15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [-1,0)$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$. Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5,-1\}$ stetig. Da $x^2+2x-15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen sowie x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, ist f an jenen Stellen auch nicht stetig.

Aufgabe 2

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x)| \overset{(1)}{=} \frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geqslant 0}} \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : \ x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \iff \quad 1-xy = \sqrt{1-x^2} \\ &\overset{1-xy \geqslant 0}{\iff} \quad 1-2xy+x^2y^2 = 1-x^2 \quad \iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\ &\overset{x \neq 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}\,. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1}\colon \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1],\ y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0\,, \end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach Satz 8.10 auch.

Aufgabe 3

Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = |x^n \sin(x^{-1})| \leqslant x^n\,,$$

woraus $f_n(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 = f_n(0)$ folgt.
Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \sin(x^{-1}) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \geqslant 2$ existiert dieser Grenzwert [es handelt sich dann um $\lim_{x\to 0} f_{n-1}(x) = 0$], für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $(x_k)_k := ((\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1})_k$ gilt nämlich $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, aber

$$\frac{f_1(x_k) - f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert für $k \to \infty$ nicht.

Aufgabe 4

Seien $\alpha > 1$, $C > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$. Es gilt

$$0 \leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant \lim_{x\to x_0} \frac{C\,|x-x_0|^\alpha}{|x-x_0|} = C \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^{\alpha-1} = 0$$

wegen $\alpha - 1 > 0$. Damit ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0\,,$$

d.h. f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$.
Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

a) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x)\cdot\sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.
Ist $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)\sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x))\, g'(x) = E(g(x))\, g'(x) = f(x)\, g'(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \ln'(x)\ \sqrt[3]{x} + \ln(x)\ (x^{1/3})' = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,\frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\ln(x))}{3x}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,,$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\log(x))}{3x}\,f(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

b) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\,e^{\sin x} + \cos(2x)\,e^{\sin x}\cos x = \big(\cos(2x)\ \cos x - 2\sin(2x)\big)\,e^{\sin x}\,.$$

c) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1,\infty)$

$$f'(x) = \ln'(\ln x)\ \ln'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

d) Für jedes $x \in (0,\pi)$ gilt [Man beachte $\sin x > 0$ für alle $x \in (0,\pi)$.]

$$f(x) = x^{\sin x}\,(\sin x)^x = e^{\ln(x)\cdot\sin x}\cdot e^{\ln(\sin x)\cdot x} = e^{\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x} = E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\,.$$

Mehrmalige Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt für jedes $x \in (0,\pi)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= E'(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)' \\ &= E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot\Big(\frac{1}{x}\sin x + \ln(x)\cos(x) + \frac{\cos x}{\sin x}\,x + \ln(\sin x)\Big) \\ &= x^{\sin x}\,(\sin x)^x\,\Big(\frac{\sin x}{x} + \ln(x)\cos(x) + \frac{x}{\tan x} + \ln(\sin x)\Big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) **i)** Wir betrachten die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \cos x$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x > 0$ ein $\xi \in (0,x)$ mit

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\xi\,.$$

Speziell zu $x_n := \frac{1}{n}$ existiert ein solches $\xi_n \in (0,\frac{1}{n})$. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1-\cos\tfrac{1}{n}\big) = \frac{1-\cos x_n}{x_n} = \sin\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \sin 0 = 0\,, \qquad \text{da sin in 0 stetig ist.}$$

ii) Hier betrachten wir die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1,x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\big| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x\in(x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t\ln t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\ln t + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \ln t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\ln x - y\ln y = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\ln\xi) \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,.$$