

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1, 3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f: [-7, 3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2 + 2x - 15, x^3\} & \text{für } x \in [-7, -5] \cup [-1, 3] \\ x + 5 & \text{für } x \in (-5, -1) \end{cases}$$

Aufgabe 2

Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

- Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- Bestimmen Sie das Bild $f([-1, 1])$ von f .
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.
- Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1} .
- Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.
- Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Funktionen an der Stelle 0 stetig sind und welche dort differenzierbar sind.

Aufgabe 4

Seien $\alpha > 1$ und $C > 0$. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f auf \mathbb{R} differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

- a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{\sqrt[3]{x}}$ b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(2x) e^{\sin x}$
c) $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\ln x)$ d) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{\sin x} (\sin x)^x$

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Grenzwerte.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}\right)$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Abschätzung

$$x \ln x - y \ln y \leq (x - y)(1 + \ln x) \quad \text{für } x > y > 0.$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1a), 3, 5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.