

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f' . Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0, e) \\ (e, \infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0, \infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x &\iff e^{y \cdot \ln(x)} > e^{x \cdot \ln(y)} \stackrel{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} y \cdot \ln(x) > x \cdot \ln(y) \\ &\iff \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \iff f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e, ∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

Aufgabe 2

- a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x} + 4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x} + 4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned} 1 - (f(x))^2 &= 1 - (1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1})^2 = 1 - (1 - 16(e^{2x} + 4)^{-1} + 64(e^{2x} + 4)^{-2}) \\ &= 16(e^{2x} + 4)^{-1} - 64(e^{2x} + 4)^{-2} = 16(e^{2x} + 4)^{-2}((e^{2x} + 4) - 4) = 16e^{2x}(e^{2x} + 4)^{-2} \end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

- b) f hat als Bildbereich $(-1, 1)$, denn $x \mapsto (e^{2x} + 4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0, \frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{1}{1 - (f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1 - y^2} \quad \text{für alle } y \in (-1, 1).$$

- c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1} = y &\iff (1 - y)^{-1} = \frac{1}{8}(e^{2x} + 4) \iff 8(1 - y)^{-1} - 4 = e^{2x} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \ln(8(1 - y)^{-1} - 4). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für jedes $y \in (-1, 1)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1 - y)^{-1} - 4} \cdot \frac{8}{(1 - y)^2} = \frac{4}{8(1 - y) - 4(1 - y)^2} = \frac{4}{4 - 4y^2} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

- d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \text{also} \quad T(x) = \frac{16}{25}x - \frac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y - y_0) + f^{-1}(y_0), \quad \text{also} \quad T(y) = \frac{25}{16}y + \frac{15}{16}.$$

Aufgabe 3

- a) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3, 2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f . Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2).$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3, 2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3, 2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47 , das Minimum ist -2 .

- b) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0, 10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0, 10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0, 3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 = x^2 - 16x + 25, \quad \text{also } g'(x) = 2x - 16.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin [0, 3]$. Also hat g' in $[0, 3]$ keine Nullstelle. Auf $[3, 10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x - 1)^2 = x^2 - 8x + 1, \quad \text{also } g'(x) = 2x - 8.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g .

Aufgabe 4

- a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4},$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f; 0)$ ergibt sich

$$T_4(f; 0)(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = 0 + x + \frac{1}{2!} (-1)x^2 + \frac{1}{3!} 2x^3 + \frac{1}{4!} (-6)x^4$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

Sei $x \geq 0$. Um die Abschätzung $0 \leq \ln(1+x) - T_4(f; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f; 0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!} (x-0)^{4+1},$$

also mit

$$f(x) - T_4(f; 0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leq \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \leq \frac{1}{5}x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5} x^5 \geq 0,$$
$$\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5} x^5 \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1+0)^5} x^5 = \frac{1}{5} x^5.$$

- b) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1, 1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1, 1]$

$$\left| f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{x^2}{2(2+\xi)^2} \right| \leq \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

- c) Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.$$

Daher sind

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} + \frac{2}{3}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{-1/2} - \frac{4}{9}, \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} + 2 \cdot \frac{8}{27} = e^{-1/2} + \frac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f; \frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f; \frac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!} (x - \frac{1}{2})^k = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)(x - \frac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \frac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \frac{4}{9})(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(e^{-1/2} + \frac{16}{27})(x - \frac{1}{2})^2. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0, 1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f; \frac{1}{2})(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(2+1)!} (x - \frac{1}{2})^{2+1},$$

also mit

$$|f(x) - T_2(f; \frac{1}{2})(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!} |x - \frac{1}{2}|^3.$$

Wegen $\xi \geq 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6} \left(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \right) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6};$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.

$$|f(0.6) - T_2(f; \frac{1}{2})(0.6)| = |1.17381 - 1.174098| = 0.000288.$$

Aufgabe 5

- a) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(1/x) + x^2 \sin(1/x) \frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n / \cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0.$$

- b) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞ . Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x} \cos x = e^{\sin x}(2 \cos^2 x + x \cos x + \sin x \cos^2 x) \\ &= e^{\sin x} \cos x (2 \cos x + x + \sin x \cos x). \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n + \frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x , für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos x}{e^{\sin x}(2 \cos x + x + \sin x \cos x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$