

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen e^π , π^e die größere ist.

Aufgabe 2

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

- Beweisen Sie, dass f injektiv ist, und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von f .
- Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von f^{-1} .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktionen

- $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2$;
- $g: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -6x + (|x - 3| + 2)^2$.

Aufgabe 4

- Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f; 0)$ von $f: x \mapsto \ln(1 + x)$ und zeigen Sie

$$0 \leq \ln(1 + x) - T_4(f; 0)(x) \leq \frac{1}{5} x^5 \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

- Bestimmen Sie Zahlen a , b und c , für die gilt:

$$|\ln(2 + x) - a - bx| \leq cx^2 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

- Approximieren Sie die Funktion $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(f; \frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an so, dass für alle $x \in [0, 1]$ gilt:

$$|f(x) - T_2(f; \frac{1}{2})(x)| \leq C |x - \frac{1}{2}|^3.$$

Berechnen Sie

$$|f(0.6) - T_2(f; \frac{1}{2})(0.6)|.$$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x) \cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 3a), 4a), 4b), und 5a)**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.