Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin x$ und $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= \int 1 \cdot \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x \arcsin'(x)\,dx \\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.\end{aligned}$$

b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x\,dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du\Big|_{u=e^x} = \arctan(u)\Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x)\,.$$

c) Wir substituieren $u = 1-x$. Dies liefert $du = (-1)\,dx$, also

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\,du\Big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du\Big|_{u=1-x} = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\Big|_{u=1-x} \\ &= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\Big|_{x=0}^1 = \tfrac{1}{8}(3^4 - 1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|\,dx &= \int_{-2}^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \big(x - \tfrac{1}{2}x^2\big)\Big|_{-2}^1 + \big(\tfrac{1}{2}x^2 - x\big)\Big|_1^2 \\ &= \big(1 - \tfrac{1}{2}\big) - (-2-2) + (2-2) - \big(\tfrac{1}{2} - 1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\big(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)\big) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2}\,.$$

d) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx \\ &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^1 = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3 - \sqrt{5}\,)\,.\end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t = 1$ entspricht $x = g(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = g(4) = 2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\Big|_{x=1}^2 = 2\big(\ln(3) - \ln(2)\big) = 2\ln\tfrac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\big|_{x=1}^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\ln e - \ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \big(\tfrac{1}{4}x^2\big)\big|_{x=1}^e = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

g) Wieder kommt partielle Integration zum Einsatz: $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx &= \sin x\cdot(-\cos x)\big|_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \cos x\cdot(-\cos x)\,dx = \int_0^\pi (\cos x)^2\,dx \\ &= \int_0^\pi \big(1-(\sin x)^2\big)\,dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx\end{aligned}$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \pi\,, \qquad \text{also} \qquad \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Aufgabe 3

Die Summe $A + C$ ist nicht definiert, weil die Spaltenanzahl von A und C nicht übereinstimmt. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

$$A^*C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-i \\ -3i & 1 & 4 \\ -1 & 1+i & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4-2i \\ 12 & 8-i \\ -5 & -5-i \end{pmatrix}$$

$$C^T B = \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 6 & 2+3i \\ -i & 6+i & -2i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens: In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$ seien n linear unabhängige Vektoren $x_1,\dots,x_n$ gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1,\dots,u_n\in V$ so konstruieren, dass $\operatorname{lin}\{u_1,\dots,u_j\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ für alle $j=1,\dots,n$ gilt.
Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem $v_1,\dots,v_n$ mit der Eigenschaft $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ für alle $j=1,\dots,n$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1\}=\operatorname{lin}\{x_1\}$ können wir erfüllen, indem wir $v_1:=x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses $j\in\{1,\dots,n-1\}$ ein Orthogonalsystem $v_1,\dots,v_j$ mit $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1}:=x_{j+1}+\sum_{k=1}^{j}\lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k\in\mathbb{K}$, so ist die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_{j+1}\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_{j+1}\}$ erfüllt. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit $i\in\{1,\dots,j\}$ ist, muss

$$0\overset{!}{=}\langle v_{j+1},v_i\rangle=\langle x_{j+1},v_i\rangle+\sum_{k=1}^{j}\lambda_k\langle v_k,v_i\rangle=\langle x_{j+1},v_i\rangle+\lambda_i\langle v_i,v_i\rangle$$

für alle $i\in\{1,\dots,j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i:=-\frac{\langle x_{j+1},v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}=-\frac{\langle x_{j+1},v_i\rangle}{\|v_i\|^2}\,.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ werden rekursiv definiert durch

$$v_1:=x_1\,,\qquad v_{j+1}:=x_{j+1}-\sum_{k=1}^{j}\frac{\langle x_{j+1},v_k\rangle}{\|v_k\|^2}\,v_k\quad(j=1,\dots,n-1)\,.$$

Man beachte: Die Vektoren $x_1,\dots,x_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1\neq 0$ und $x_{j+1}\notin\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}=\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}$ für $j=1,\dots,n-1$, und damit folgt $v_j\neq 0$ für alle j. Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.
Setzen wir nun noch $u_j:=v_j/\|v_j\|$ $(j=1,\dots,n)$, so haben wir ein Orthonormalsystem mit den geforderten Eigenschaften bestimmt.

a) Die gegebenen Vektoren x_1,x_2,x_3 sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren zeilenweise in eine Matrix schreiben und diese auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 5 & 3i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3\to Z_3-5Z_1]{Z_2\to Z_2-2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 3i & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3\to Z_3-\frac{3}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Verfahren durch:

$$v_1 := x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\langle x_2, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \overline{1} + 2i \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$v_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|v_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von v_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle x_3, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6,$$

$$\langle x_3, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$v_3 := x_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fazit: u_1, u_2, u_3 ist ein Orthonormalsystem mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren y_1, y_2, y_3 auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass y_3 eine Linearkombination von y_1 und y_2 ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Infolgedessen gilt $\operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$.

Wir sehen außerdem, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2} y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$.