Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2018/19
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S.Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R \\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

b) Aus der Ungleichung $1+t \leqslant e^t$ folgt $\ln(1+t) \leqslant t$ für alle $t \geqslant 0$. Also ist

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \leqslant te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 2

a) **i)** Da der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ genau dann, wenn die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \ln|x|\,dx$$

konvergent sind, also genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+}\int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx$$

existieren.

Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx = \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \big[x\ln x - x\big]_\varepsilon^1 = (0-1) - (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} -1\,.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$.
Sei nun $\eta \in (0,1)$. Mit der Substitution $y = -x$, $dy = (-1)\,dx$ erkennen wir

$$\int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx = \int_{-1}^{-\eta} \ln(-x)\,dx = \int_{1}^{\eta} \ln(y)\,(-1)\,dy = \int_{\eta}^{1} \ln y\,dy \xrightarrow{\eta\to 0+} -1$$

(siehe oben!). Damit ist auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{0} \ln|x|\,dx$ konvergent.
Insgesamt folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$ konvergiert und dass gilt:

$$\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx = \lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx = -1-1 = -2\,.$$

ii) Erneut ist der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert. Deshalb muss man untersuchen, ob die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

konvergent sind, also ob die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

existieren.
Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_{\varepsilon}^{1} = -\ln\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \infty\,.$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent, so dass auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ divergiert.

b) i) Wie in **a) i)** gesehen, sind $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,dx = -1$ und $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx = -1$ konvergent. Daher konvergiert auch deren Summe: $\lim_{\varepsilon\to 0+}\big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx\big)$ $= -1-1 = -2$.

ii) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln|x|\big]_{-1}^{-\varepsilon} + \big[\ln|x|\big]_{\varepsilon}^{1} = \ln\varepsilon - 0 + 0 - \ln\varepsilon = 0\,.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \right) = 0\,.$$

Man beachte: Dieser Grenzwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ divergent ist! Man spricht hier vom sog. Cauchychen Hauptwert.

Aufgabe 3

a) Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(1\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\big) - 2\big(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1\big) + 4\big(-1\cdot(-1) - 1\cdot 1\big) = -4. \end{aligned}$$

b) Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz. [Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\det(A) =_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4 \to Z_4 - Z_1]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 - Z_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2\big((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2\big) = 16.$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \to S_j - S_1, j=2,3,4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_3]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 4

a) $\det(A + B) = \det A + \det B$?
Nein (außer für $n = 1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A = 0$).
Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 2^2 \det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

b) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?
Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl.

Aufgabe 5

Mit $A = (a_1, a_2, a_3)$ bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix des gegebenen linearen Gleichungssystems, mit b die rechte Seite. Die Cramersche Regel ist nur anwendbar, wenn A regulär ist; wegen

$$\det(A) =_{\left[\substack{Z_2\to Z_2+Z_1\\ Z_3\to Z_3-2Z_1}\right]} \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix} =_{[\text{Entw.}\, S_1]} \det\begin{pmatrix}5 & 2\\ -5 & -5\end{pmatrix} =_{[Z_2\to Z_2+Z_1]} \det\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

ist dies der Fall. Nach der Cramerschen Regel gilt dann

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(A)}, \qquad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b)}{\det(A)}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} =_{[Z_3\to Z_3+Z_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} = -\frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Auch bei x_2 und x_3 addieren wir jeweils die erste Zeile zur dritten und entwickeln dann nach der zweiten bzw. dritten Spalte:

$$x_2 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -\frac{1}{15},$$

$$x_3 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{13}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{2}{3})$ die eindeutig bestimmte Lösung des gegebenen Systems.