Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik
Teil: Analysis

Wintersemester 2018/19

Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

Dies ist eine kurze Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Beispiele, Erläuterungen und veranschaulichen- den Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

Contents

1 Aussagen

1.1 Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** ist.

Im Rahmen der Vorlesung sind wir aber eher an **mathematischen Aussagen** interessiert. Aussagen bezeichnen wir im folgenden mit A, B, C, ...

Beispiele (1) 2 ist eine ungerade Zahl **(f)**. (2) $8 = 2^3$ **(w)**

1.2 Verknüpfung von Aussagen

Wir erklären die logische Verknüpfung von Aussagen durch sogenannte Wahrheitstafeln .

$A \wedge B$ (logisches "und" (AND))

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

$A \vee B$ (logisches "oder" (OR))

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Achtung: Das logische "oder" ist nicht exklusiv, dh es ist zugelassen, dass beide Aussagen A und B wahr sind.

Beispiele $(8 = 2^3) \vee (5 \cdot 3 = 15)$ ist wahr. $(8 = 2^3) \vee (5 \cdot 3 = 10)$ ist wahr. $(8 = 2^3) \wedge (5 \cdot 3 = 10)$ ist falsch.

Negation $\neg A$ ("non A" oder "nicht A")

A	w	f
$\neg A$	f	w

Implikation $A \Rightarrow B$ "wenn A, dann B", "A impliziert B", "aus A folgt B"

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Man sagt: "A ist äquivalent zu B", "A ist gleichbedeutend mit B", "A genau dann, wenn B", " A dann und nur dann, wenn B".

Beispiele $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ ist wahr. $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ ist falsch. $((x = 3) \vee (x = -3)) \Leftrightarrow x^2 = 9$ ist wahr.

1.3 Regeln

$\neg$ bindet stärker als $\wedge/\vee$; $\wedge/\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow/\Leftrightarrow$.

$$\begin{array}{rcl}
\neg(\neg A) & \Leftrightarrow & A \qquad \text{(doppelte Negation)} \\
(A \Leftrightarrow B) & \Leftrightarrow & [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \qquad \text{(Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen)} \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) \qquad \text{(Negation von “und”)} \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \qquad \text{(Negation von “oder”)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee B) \qquad \text{(Umformulierung der Implikation)} \\
\neg(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \qquad \text{(Negation der Implikation)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad (\underline{\text{Kontraposition}}).
\end{array}$$

Kommutativität: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

Assoziativität: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. Deshalb kann man hier die Klammern weglassen.

Distributivität: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

1.4 Quantoren

Eine Aussageform $A(x)$, $A(x,y)$, ... ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen x, y, ... enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete Objekte eine Aussage ist.

Beispiel $A(x,y) : x + 3y = 5$.
A(2,1) ist wahr, weil $2 + 3 \cdot 1 = 5$. $A(0,2)$ ist falsch weil $0 + 3 \cdot 2 = 6 \neq 5$.

Der Allquantor $\forall x : A(x)$ bedeutet: für alle Objekte x ist die Aussage $A(x)$ wahr.

Der Existenzquantor $\exists x : A(x)$ bedeutet: es gibt (mindestens) ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Negation: $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x))$ und $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x))$.

Beispiele Mit x bezeichnen wir alle natürliche Zahlen. Sei $B(x)$ die Aussage form x ist größer als 5.

$\forall x : B(x)$ bedeutet: jede natürliche Zahl ist größer als 5 **(f)**.

$\exists x : B(x)$ bedeutet: es gibt mindestens eine natürliche Zahl die größer ist als 5 **(w)**.

$\neq (\forall x : B(x))$ ist äquivalent zu: es gibt mindestens eine natürliche Zahl die nicht größer als 5 ist **(w)**.

In den allermeisten Fällen werden Quantoren eingeschränkt und beziehen sich dann nur auf gewisse Objekte, z.B. $\forall x$ mit $A(x) : B(x)$. Die Negation davon ist dann $\exists x$ mit $A(x)$: $\neg B(x)$.

Achtung: Bei All- und Existenzquantor kommt es i.a. auf die Reihenfolge an.

Bemerkung: Häufig schreiben wir Quantoren nicht als Zeichen, sondern sprachlich.

2 Mengen

2.1 Der Begriff der Menge

Wir verwenden die folgende naive "Definition":

"Eine <u>Menge</u> ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte."

Diese Objekte heißen <u>Elemente</u> der Menge.

$x \in M$ bedeutet: x ist Element der Menge M, dh x gehört zu M.

$x \notin M$ bedeutet: x gehört nicht zu M, dh $x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Schreibweisen: Ist $A(x)$ eine Aussageform, so kann man schreiben

$$M = \{x : A(x)\} = \text{Menge aller } x\text{, für die } A(x) \text{ gilt,}$$

Häufig schreibt man auch, wenn die Menge M gegeben ist, $\{x \in M : A(x)\}$ für $\{x : (x \in M) \wedge A(x)\}$. Eine andere Möglichkeit ist die Aufzählung, z.B. $M = \{1, 2, 3, 9\}$.

2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Seien M_1, M_2 Mengen.

Definition 2.1. *"M_1 ist Teilmenge von M_2":*

$$M_1 \subseteq M_2 \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2) \quad (\textit{bzw. } \forall x \in M_1 : x \in M_2).$$

Für $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$ schreibt man oft der Deutlichkeit halber $M_1 \subsetneqq M_2$.

Oft statt $M_1 \subseteq M_2$ schreibt man $M_1 \subset M_2$.

Gleichheit von Mengen: $M_1 = M_2$ bedeutet, dass M_1 und M_2 dieselben Elemente enthalten, also $\forall x : (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$. Da Äquivalenz zwei Implikationen bedeutet (siehe 1.3) bedeutet $M_1 = M_2$ also $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

Beispiele: Wir schreiben $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *Menge der natürlichen Zahlen.*
$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}, \{1, 2\} \subsetneqq \{1, 2, 3\}$
$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade Primzahl}\} = \{2\}$,
$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl} \wedge x > 2\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\}$.

2.3 Operationen mit Mengen

Seien M_1, M_2, M_3 und Q Mengen. D (a) Durchschnitt $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$.
(b) Vereinigung $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$.
(c) Differenz $M_1 \setminus M_2 := \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$ ("M_1 ohne M_2").

Beispiele $\{1,2,4,6\} \cup \{1,3,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$. $\{1,2,4,6\} \cap \{1,3,5,6\} = \{1,6\}$, $\{1,2,4,6\} \setminus \{1,3,5,6\} = \{2,4\}$, $\{1,3,5,6\} \setminus \{1,2,4,6\} = \{3,5\}$.

Regeln für Durchschnitt und Vereinigung:

$$\text{Kommutativität} \qquad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \qquad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$$

Assoziativität $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3, \qquad M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$.

Distributivität:

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3), \quad M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

Außerdem ist $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$.

Beispiele: $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl}\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\} = \{2\}$.
$\{1,2,3\} \cap \{1,3,4\} \cap \{1,4,5\} = \{1\}$.
$\{2,3,4,5\} \cap (\{1,3,4\} \cup \{1,4,5\}) = \{2,3,4,5\} \cap \{1,3,4,5\} = \{3,4,5\}$.
$(\{2,3,4,5\} \cap \{1,3,4\}) \cup (\{2,3,4,5\} \cap \{1,4,5\}) = \{3,4\} \cup \{4,5\} = \{3,4,5\}$.

de Morgansche Regeln: Wegen 1.3 (Negation von "und"/"oder") gilt auch

$$Q \setminus (M_1 \cup M_2) = (Q \setminus M_1) \cap (Q \setminus M_2), \qquad Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

2.4 Die leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente, dh $\forall x : x \notin \emptyset$.

Regeln: $M \cup \emptyset = M$, $M \setminus \emptyset = M$, $M \cap \emptyset = \emptyset$, $M \setminus M = \emptyset$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

Beispiel $\{x \in \mathbb{N} : x > 2 : x^2 < 9\} = \emptyset$, weil es keine natürliche Zahlen gibt die größer als 2 sind und deren Quadrat kleiner als 9 ist.

2.5 Das kartesische Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien M_1, M_2, $\ldots$, M_n Mengen. Die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in M_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ der Mengen M_1, M_2, $\ldots$, M_n. Also

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ gilt } x_j \in M_j\}.$$

Wir schreiben M^n, falls $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$ gilt.

Beispiele:

(1) $M_1 = \{0, 1\}$, $M_2 = \{1, 2, 3\}$, $M_1 \times M_2 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

(2) $M = \{0, 1\}$, $M^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

(3) Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Dann $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}^2\}$. Die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ wird meistens durch $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Besonders wichtig ist natürlich der Fall $n = 2$, in dem $M_1 \times M_2$ die Menge aller *geordneten Paare* (x_1, x_2) mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ ist.

2.6 Die Mengen der reellen und komplexen Zahlen

Reelle Zahlen und Betrag

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen. Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ der $\underline{\text{Betrag von } a}$.

Beispiele: $|1| = 1$, da $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$ (vgl. 4.2(2)), $|-2| = -(-2) = 2$, da $2 = 1 + 1 \geq 1 + 0 = 1 \geq 0$ und somit $-2 \leq 0$.

Beachte: Es gilt $|a| = |-a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also auch $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Anschaulich ist $|a - b|$ der **Abstand** von a und b auf der Zahlengeraden.

Regeln: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|a| \geq 0$; (2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; (3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(4) $\pm a \leq |a|$ und $\Big(|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; (a \leq c \text{ und } -a \leq c)\Big)$;

(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ <u>Dreiecksungleichung</u> ;

(6) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ <u>umgekehrte Dreiecksungleichung</u> .

Beweis. (1)-(4) sind leicht. Zu (5): Falls $a + b \geq 0$ ist, so gilt $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$ nach (4). Falls $a + b < 0$ ist, so ist $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$ nach (4).

Zu (6): Nach (5) ist $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ und $|b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a|$. Es folgt $|a| - |b| \leq |a - b|$ und $|b| - |a| \leq |a - b|$. Nach (4) gilt somit $||a| - |b|| \leq |a - b|$. $\square$

Die Menge der komplexen Zahlen

Wir betrachten eine Zahl i, mit $i^2 = -1$. Es ist dann

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{die Menge der } \underline{\text{komplexen Zahlen}}.$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt x der Realteil von z (geschrieben $\mathrm{Re}\, z$) und y heißt der Imaginärteil von z (geschrieben $\mathrm{Im}\, z$). Komplexe Zahlen z mit $\mathrm{Re}\, z = 0$ heißen rein imaginär und komplexe Zahlen mit $\mathrm{Im}\, z = 0$ heißen reell.

Beispiele $\mathrm{Re}\,(1 - 5i) = 1, \mathrm{Im}\,(1 - 5i) = -5$ (und **nicht** $-5i$). Die Zahl 5 ist reell die Zahl $10i$ ist rein imaginär.

Also: Man kann mit komplexen Zahlen wie gewohnt rechnen und muss nur $i^2 = -1$ berücksichtigen, etwa

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2),$$

Beispiel $(2 + 5i)(3 + 4i) = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + i(3 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -14 + 7i.$

Konjugation und Betrag Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die konjugierte komplexe Zahl . Es gilt dann $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ und $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt Betrag der komplexen Zahl z.

Beispiele $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \overline{3 + 4i} = 3 - 4i.$

Rechenregeln: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{(\overline{z})} = z, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \ ,$$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

$\max\{|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$

$|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung) und $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

[Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + \underbrace{z\overline{w} + \overline{(z\overline{w})}}_{=2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq 2|z\overline{w}|} \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2,
\end{aligned}$$

woraus die Dreiecksungleichung durch Wurzelziehen folgt.]

Eine komplexe Zahl ist Null genau dann, wenn Real- und Imaginärteil beide Null sind. Ist $x + iy \neq 0$, so ist das multiplikativ Inverse gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Ein konkreteres Beispiel wäre das folgende $\frac{1}{1+2i} = \frac{(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$

3 Funktionen

3.1 Zum Begriff der Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) $f : X \to Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu. Für das einem gegebenen $x \in X$ zugeordnete $y \in Y$ schreiben wir $f(x)$.

Schreibweise $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ ("f von X nach Y, x wird abgebildet auf $f(x)$").

Beispiel: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 2 \cdot x - 1$, dann ist $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ etc.

Die Menge $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt Graph von f. Man kann diesen mit der Funktion f identifizieren.

Für eine Funktion $f : X \to Y$ heißt X Definitionsbereich und Y Wertebereich von f. Für $A \subseteq X$ heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ Bild von A unter f, und für $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B unter f. Insbesondere heißt $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ Bild von f (Menge aller $y \in Y$, die von f getroffen werden).

Beispiele (1) Wir betrachten wieder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 2 \cdot x - 1$. Dann

$$f(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\}$$

und etwa

$$f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \{1, 2, 3\}.$$

Definition 3.1. *Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.*

(a) f heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt, dh falls jedes $y \in Y$ von f getroffen wird.

(b) f heißt injektiv, falls gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, dh falls es zu jedem Element im Bild von f genau ein Urbild gibt.

(c) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele: (1) Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von oben ist injektiv und nicht surjektiv.

(2) Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & x \text{ ist gerade} \\ 1, & x \text{ ist ungerade} \end{cases}$ ist surjektiv und nicht injektiv.

(3) Die Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, weil z.B $h(1) = 1 = h(-1)$. Sie ist nicht surjektiv weil z.B. es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $h(x) = -1$.

(4) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$ ist surjektiv. Sie ist injektiv weil $f(x_1) = f(x_2) \implies 2x_1 = 2x_2 \implies x_1 = x_2$. Sie ist surjektiv weil für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = f(\frac{x}{2})$.

3.2 Komposition

Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen, so definiert $g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$ eine Funktion $g \circ f$ ("g nach f"), die Hintereinanderausführung oder Komposition von f und g.

BeispielSeien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x + 1$. Dann $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch die Formel $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2$, und $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch die Formel $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$.

Satz 3.1. *Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Funktionen, so gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

dh die Hintereinanderausführung von Funktionen ist assoziativ.

3.3 Die Umkehrabbildung

Frage: Können wir die Gleichung $f(x) = y$ bezüglich x lösen. Das könnte man mit Hilfe der Umkehrabbildung beantworten.

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion, so definiert

$$Y \to X, \quad y \mapsto x, \text{ falls } f(x) = y$$

eine Funktion f^{-1}, die Umkehrabbildung (oder Umkehrfunktion) von f.

Beachte: Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem y ein solches x. Da f injektiv ist, ist dieses x eindeutig bestimmt. Somit ist f^{-1} tatsächlich eine Funktion.

Beispiele: (1) Ist $\emptyset \neq X$ eine Menge, so heißt die Funktion $X \to X$, $x \mapsto x$, die *Identität* auf X, geschrieben Id_X oder id_X. Die Funktion id_X ist bijektiv und es ist $(\mathrm{id}_X)^{-1} = \mathrm{id}_X$.

(2) Wie schon in 3.1 erklärt ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$ surjektiv. Die Umkehrabbildung kann man finden, wenn man die Gleichung $y = f(x)$ bezüglich x löst. Da $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$ haben wir $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ oder $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Bemerkung 3.1. *Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$.*

Satz 3.2. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Funktionen mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, so ist f bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$.*

Bemerkung 3.2. *Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt auch $f = g^{-1}$ und insbesondere $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Satz 3.3. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen, so ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$.*

4 Gründlichere Einführung der reellen Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen . Wir führen diese Menge durch 15 Axiome ein, dh durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich **alle** weiteren Rechenregeln herleiten lassen. Wir nehmen dann $\mathbb{R}$ als mit diesen Axiomen gegeben an. Eine explizite Konstruktion (die natürlich möglich ist!), führen wir hier nicht durch.

4.1 Körperaxiome

Es gibt Verknüpfungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("plus", wir schreiben $a + b$) und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("mal", wir schreiben ab oder $a \cdot b$) mit

$$
\begin{array}{rlrl}
\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c) & (A1) & (ab)c = a(bc) & (A5) \\
\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a & (A2) & \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a & (A6) \\
\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 & (A3) & \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 & (A7) \\
\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a & (A4) & ab = ba & (A8) \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac & (A9) & &
\end{array}
$$

Dabei sind $(A1)$ und $(A5)$ die Assoziativgesetze , $(A4)$ und $(A8)$ die Kommutativgesetze, und $(A9)$ ist das Distributivgesetz.

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir $a - b := a + (-b)$ und, falls $b \neq 0$ ist, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

Beispiele: (1) Die Null in $(A2)$ ist eindeutig, ebenso die Eins in $(A6)$.

Beweis. Ist $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$, so folgt wegen $(A2)$ und $(A4)$: $0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. □

(2) Die Elemente a in $(A3)$ und a^{-1} in $(A7)$ sind eindeutig bestimmt. Außerdem gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$: $-(-a) = a$ und, falls $a \neq 0$ ist, $(a^{-1})^{-1} = a$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 0 = 0$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Nach $(A2)$ und $(A9)$ gilt $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Setzen wir $b := a \cdot 0$, so folgt $0 = b + (-b) = (b + b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$. □

(4) $\forall a \in \mathbb{R}$: $-a = (-1) \cdot a$.

Beweis. Es gilt (nach $(A6)$, $(A9)$, und (3)): $a + a \cdot (-1) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0$, also $-a = a \cdot (-1) = (-1) \cdot a$. □

(5) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a^2 = (-a)^2$, wobei $a^2 := a \cdot a$.

Beweis. Es ist, nach (4), $(A5)$, $(A8)$ und (2): $(-a)^2 = (-a) \cdot (-1) \cdot a = (-(-a)) \cdot a = a^2$. □

4.2 Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine Ordnung "$\leq$" gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (A10) & \forall a,b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ oder } b \leq a, \\ (A11) & \forall a,b,c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c, \\ (A12) & \forall a,b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b, \\ (A13) & \forall a,b,c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \\ (A14) & \forall a,b,c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc. \end{array}$$

$(A11)$ heißt Transitivität, $(A12)$ heißt Antisymmetrie. Außerdem beinhaltet $(A10)$ auch, dass $a \leq a$ gilt (Reflexivität).

$(A13)$ und $(A14)$ bedeuten, dass die Ordnung $\leq$ mit den Verknüpfungen "+" und "·" verträglich ist.

Schreibweisen: $b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b$; $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\Leftrightarrow a < b$.

Bemerkung 4.1. *Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Rechenregeln für Ungleichungen herleiten. Diese setzen wir von nun an als bekannt voraus.*

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen:

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall}, \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{offenes Intervall}, \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall}, \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall}, \\ [a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, & \\ (a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, & \\ (-\infty,a] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, & \\ (-\infty,a) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < a\}. & \end{array}$$

Weiter: $[a,a] := \{a\}$ und $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$.

4.3 Supremum und Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.

M heißt nach oben [unten] beschränkt $:\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall x \in M : x \leq \gamma$ $[x \geq \gamma]$.

In diesem Fall heißt γ eine obere Schranke (OS) [untere Schranke (US)] von M.

Eine obere Schranke [untere Schranke] γ von M mit $\gamma \in M$ heißt Maximum [Minimum] von M und wird mit $\max M$ [$\min M$] bezeichnet.

Wegen $(A12)$ sind $\max M$ und $\min M$ im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

Beispiele: Jede endliche nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben und nach unten beschränkt und besitzt Maximum und Minimum. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| = \max\{a, -a\}$.

$[1, 2]$ ist nach oben und nach unten beschränkt, es ist $1 = \min M$ und $2 = \max M$.

$(1, \infty)$ ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt und hat kein Minimum.

Definition 4.1. *Ist γ obere Schranke [untere Schranke] von M mit $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ [$\gamma \geq \tilde{\gamma}$] für **jede** obere Schranke [untere Schranke] $\tilde{\gamma}$ von M, so heißt γ Supremum [Infimum] von M (**kleinste** obere Schranke von M [**größte** untere Schranke von M]) und wird mit $\sup M$ [$\inf M$] bezeichnet.*

Nach $(A12)$ sind Supremum und Infimum im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

Bemerkung 4.2. *Ein Maximum ist immer auch Supremum, und es gilt $\sup M = \max M$ genau dann, wenn $\sup M \in M$ ist (entsprechend für $\min$ und $\inf$).*

Beispiele: (1) $M = [1, 2)$. M ist nach unten und nach oben beschränkt. Es ist $1 = \min M = \inf M$, M hat kein Maximum, und es ist $\sup M = 2$.

Beweis. 2 ist obere Schranke von M. Zeige: es gibt keine echt kleinere obere Schranke. Sei $\tilde{\gamma} < 2$. Zeige: $\tilde{\gamma}$ ist nicht obere Schranke von M. Falls $\tilde{\gamma} < 1$ ist, so gilt $\tilde{\gamma} < 1 \in M$, also ist $\tilde{\gamma}$ keine obere Schranke von M. Falls $\tilde{\gamma} \geq 1$ ist, so ist $\tilde{\gamma} < \frac{\tilde{\gamma}+2}{2} \in M$ und $\tilde{\gamma}$ ist keine obere Schranke von M. □

(2) $M = (1, \infty)$: Es ist $1 = \inf M \notin M$ und $\sup M$ existiert nicht.

4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

$(A15)$ Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Folgerung 4.1. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Definition 4.2. *Eine Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt , falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Bemerkung 4.3. *M beschränkt $\Leftrightarrow \exists \gamma \geq 0 \forall x \in M : |x| \leq \gamma$.*

Satz 4.1. *Sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) A beschränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

(2) A nach oben [nach unten] beschränkt $\Rightarrow$ B nach oben [nach unten] beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ [$\inf B \geq \inf A$].

(3) Sei A nach oben [nach unten] beschränkt und γ eine obere Schranke [untere Schranke] von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma = \sup A &\iff \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } x \in A \textit{ mit } x > \gamma - \varepsilon \\ [\gamma = \inf A &\iff \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } x \in A \textit{ mit } x < \gamma + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Beweis. (1) und (2) sind leicht.

Zu (3): "$\Rightarrow$": Sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\gamma - \varepsilon$ keine obere Schranke von A.

"$\Leftarrow$" (Kontraposition): Sei $\gamma \neq \sup A =: \tilde{\gamma}$. Dann $\gamma > \tilde{\gamma}$, da γ obere Schranke von A ist, und $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$. Für jedes $x \in A$ gilt dann $x \leq \tilde{\gamma} = \gamma - \varepsilon$. Wir haben gezeigt: $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in A : x \leq \gamma - \varepsilon$, dh $\neg(\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon)$. □

4.5 Natürliche Zahlen

Satz 4.2. *Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.*
(1) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.
(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.
(3) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

Beweis. (1) **Annahme:** $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Dann existiert $\gamma := \sup \mathbb{N}$. Nach 4.6(3) (für $\varepsilon = 1$) finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \gamma - 1$. Dann gilt $n + 1 > \gamma$ und $n + 1 \in \mathbb{N}$, dh γ ist nicht obere Schranke von $\mathbb{N}$, Widerspruch.

(2) folgt sofort aus (1).

(3) Sei $b > 0$. Nach (2) gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b} > 0$. Es folgt $\frac{1}{n} < b$. □

4.6 Vollständige Induktion

Beweisverfahren durch Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

$$\begin{array}{rl} \text{Induktionsanfang } (IA) & A(1) \\ \text{Induktionsschritt } (IS) & \forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1))\,. \end{array}$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr, dh es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Beispiele: (1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\underbrace{n \geq 1}_{=:A(n)}$.

Beweis durch Induktion nach n. Induktionsanfang (IA): Es gilt $1 \geq 1$, dh $A(1)$ ist wahr.

Induktionsschluss (IS): Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $A(n)$, dh es gelte $n \geq 1$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann ist $n+1 \geq 1+1$ nach (IV) und $1+1 \geq 1+0 = 1$, also $n+1 \geq 1$ und $A(n+1)$ ist wahr. $\square$

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\underbrace{1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}_{=:A(n)}$.

Beweis durch Induktion nach n. (IA) $n = 1$: Es gilt $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$, dh $A(1)$ ist wahr.

(IS) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (IV). Zu zeigen ist $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Es gilt

$$1+2+\ldots+n+(n+1) \overset{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\square$

Wir setzen die natürlichen Zahlen ab jetzt als bekannt voraus.

Definition durch Rekursion (bzw. durch Induktion)

Es sei $G(1)$ definiert, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G(n+1)$ definiert unter der Voraussetzung, dass $G(1)$, $G(2)$, ..., $G(n)$ schon definiert sind.

Dann hat man $G(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Beispiele: (1) *Fakultät*: $1! := 1$ und rekursiv $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowie $0! := 1$. Dann ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(2) Summenzeichen $\sum$: Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Setze

$$\sum_{j=1}^{1} a_j := a_1 \quad \text{und für jedes } n \in \mathbb{N}: \sum_{j=1}^{n+1} a_j := \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big) + a_{n+1}.$$

Dann ist $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die leere Summe ist $\sum_{j=1}^{0} a_j := 0$.

(3) Produktzeichen $\prod$: Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Setze

$$\prod_{j=1}^{1} a_j := a_1 \quad \text{und für jedes } n \in \mathbb{N}: \prod_{j=1}^{n+1} a_j := \Big(\prod_{j=1}^{n} a_j\Big) \cdot a_{n+1}.$$

Dann ist $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Das leere Produkt ist $\prod_{j=1}^{0} a_j := 1$.

(4) Potenzen: Setze für $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1$, $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Varianten der Induktion: Man kann die Induktion auch bei z.B. $n = 5$ beginnen lassen. Zum Beweis von "$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5 : A(n)$" hat man dann zu zeigen:

$$\begin{array}{ll} (IA) & A(5) \\ (IS) & \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5 : (A(n) \Rightarrow A(n+1))\,. \end{array}$$

Bei der Abschnittsinduktion zeigt man

$$\begin{array}{ll} (IA) & A(1) \\ (IS) & \forall n \in \mathbb{N} : (A(1) \wedge A(2) \wedge \ldots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1))\,. \end{array}$$

4.7 Ganze und rationale Zahlen

Definition 4.3. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ *Menge der ganzen Zahlen und* $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ *Menge der rationalen Zahlen .*

Bemerkung: Die Axiome $(A1) - (A14)$ gelten auch in $\mathbb{Q}$. Hingegen hat die nach oben beschränkte Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$, dh das Vollständigkeitsaxiom $(A15)$ gilt **in $\mathbb{Q}$ nicht!**

Satz 4.3. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Minimum.*

4.8 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ setzt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ ("}n \text{ über } k\text{").}$$

Es gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n \geq k \geq 0$, $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Lemma 4.1. *Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n+1-k}{n+1-k} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}\frac{k}{k} \\ &= \frac{(n+1-k+k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

$\square$

4.9 Potenzen

Setze für $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1$, $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die bekannten Rechenregeln, also etwa $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ und $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$.

(2) **Binomialsatz:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Beweis durch Induktion nach n. IA $n = 0$ ist klar.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
(j = k+1) \quad &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel: $\binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5, \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10, \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10, \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5, \binom{5}{5} = \binom{5}{0} = 0$. Also $(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}a^k b^{5-k} = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

(3) **Bernoullische Ungleichung** (BU): Sei $x \geq -1$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis durch Induktion nach n. IA $n = 1$: $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (IV). Dann gilt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{\text{Wegen IV und da } 1+x \geq 0}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

$\square$

Beispiel Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n = (1+1)^n \geq n+1$.

(4) Für alle $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \Longleftrightarrow x^n \leq y^n$.

Beweis. Die Äquivalenz folgt aus der Gleichheit $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k$. □

Folgerung 4.2. *Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist $a > 1$, so gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$. Ist $a \in (0,1)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.*

Beweis. Ist $a > 1$, so finden wir zu $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{K}{a-1}$ und mit (BU) für $x = a-1$ gilt dann

$$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx = 1 + n(a-1) > 1 + K > K.$$

Ist $a \in (0,1)$, so ist $a^{-1} > 1$ und wir finden zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^{-n} > \varepsilon^{-1}$, dh mit $a^n < \varepsilon$. □

4.10 Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $b^n = a$. Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a}$, "n-te Wurzel aus a".

Folgerung 4.3. *Für alle $a, b \geq 0$ gilt wegen 4.9 Rechenregel (4):*
$a \leq b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$, und wegen $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = ab$ gilt $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

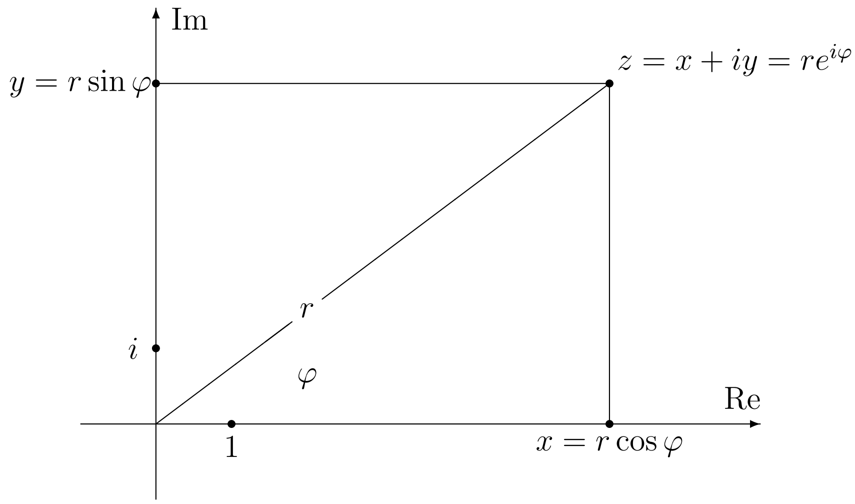
5 Mehr über die komplexen Zahlen

Polarkoordinaten und Eulerformel: Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ (wobei $x, y \in \mathbb{R}$) kann man schreiben mithilfe ihres Betrages $r = |z|$ und des Winkels φ zur positiven x-Achse (dh mithilfe von Polarkoordinaten). Es ist nämlich $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ nach Schulmathematik. Verwendet man die Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}),$$

so erhält man $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}$. Multiplikation mit z dreht dann um den Winkel φ.

Sind sin und cos bekannt, so kann man die Eulerformel als Definition von $e^{i\varphi}$ verwenden.



5.1 Polynome

Ein Polynom p (oder $p(z)$) mit komplexen Koeffizienten ist ein formaler Ausdruck $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Das Polynom heißt <u>reell</u> , wenn alle Koeffizienten a_j reell sind.

Das Polynom heißt <u>vom Grad n</u> , falls $a_n \neq 0$ gilt, und zusätzlich <u>normiert</u> , falls $a_n = 1$ ist.

Falls $a_n = 0$ ist, so ist auch $p(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, dh führende Nullkoeffizienten kann man weglassen.

Es gilt insbesondere

$$p(z) \text{ hat den Grad } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(z) = a_0 \text{ und } a_0 \neq 0.$$

Das Nullpolynom $p(z) = 0$ hat keinen Grad.

Die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten (in der “freien Variablen” z) bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[z]$.

Definition 5.1. *Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$ heißt <u>Nullstelle</u> des Polynoms p.*

Beispiele (1) Das Polynom $p(z) = 2z^2 + 2$ ist ein reeles Polynom vom Grad 2. Es hat die komplexe Nullstellen $\pm i$.

(2) Das Polynom $p(z) = z^3 - 2iz$ ist ein normiertes Polynom vom Grad 3 und hat die Nullstellen $0, 1 + i, -1 - i$.

5.2 Polynomdivision

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ Polynome vom Grad n bzw. $k \leq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $m \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{C}[z]$ mit $\operatorname{Grad} m = n - k$ und $r = 0$ oder $\operatorname{Grad} r < k$

und $p = mq + r$ (Division mit Rest).

Beweis. Für $p(z) = a_n z^n + \ldots$ und $q(z) = b_k z^k + \ldots$ setze $c_{n-k} := a_n/b_k$. Dann ist $p_1(z) := p(z) - c_{n-k} z^{n-k} q(z)$ entweder $= 0$ (dann ist man fertig) oder hat Grad $n_1 \leq n-1$. Ist $n_1 < k$, so ist man fertig, ansonsten wiederhole man den obigen Schritt mit p_1 statt p. Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten. $\square$

Beispiel $z^2 + 3z + 3 = (z+1)(z+2) + 1$ also wenn $p(z) = z^2 + 3z + 3$ und $q(z) = z + 1$ dann $m(z) = z + 2$ und $r(z) = 1$. Es ist dabei wichtig, dass *Grad* $r = 0 < 1 =$ *Grad* q.

Satz 5.1. *Ist $p \in \mathbb{C}[z]$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ und ist z_0 Nullstelle von p, so gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n-1$ mit*

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0).$$

Dabei heißt $z - z_0$ Linearfaktor.

Beweis. Wir dividieren $p(z)$ durch das Polynom $z - z_0$ (das den Grad 1 hat) und erhalten $p(z) = q(z)(z - z_0) + r(z)$, wobei $\operatorname{Grad} q = n - 1$ und $r = 0$ oder $r(z) = r_0 \neq 0$. Wegen $p(z_0) = 0$ ist $r(z_0) = 0$, also $r = 0$. $\square$

Beispiel Eine Nullstelle des Polynoms $p(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1$ ist $z = -1$ und es gilt $p(z) = (z+1)(z^2 + z + 1)$, also ist $z + 1 = z - (-1)$ ein Linearfaktor von $p(z)$.

Definition 5.2. *Die Vielfachheit (Vfh) einer Nullstelle z_0 von p gibt an, wie oft man $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - z_0$ dividieren kann.*

Folgerung 5.1. *Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

5.3 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Folgerung 5.2. *Ist $p(z)$ normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Eine feste Nullstelle z_0 von $p(z)$ kommt dabei in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so oft vor, wie ihre Vielfachheit angibt.

Beispiele: (1) $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Eine Nullstelle ist $z_0 = -1$, dann ist $z - z_0 = z + 1$. Durch Polynomdivision findet man $(z^3+z^2+z+1) : (z+1) = z^2+1 = z^2-i^2 = (z-i)(z+i)$. Also ist $p(z) = (z+1)(z-i)(z+i)$, die Nullstellen sind -1, i und $-i$ und haben jeweils die Vielfachheit 1.

(2) $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$. Einzige Nullstelle ist 1 (mit Vielfachheit 2).

5.4 Die Gleichung $z^n = c, c \in \mathbb{C}$

Um die Gleichung zu lösen schreibt man c in Polarkoordinaten ($c = re^{i\phi}$) und benutzt man den Folgenden Satz

Satz 5.2. *Die Lösungen von $z^n = re^{i\phi}$ sind: $z_j = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(2j\pi+\phi)}{n}}, j = 0, 1, ..., n-1$.*

6 Folgen und Konvergenz

Definition 6.1. *Eine reelle [komplexe] Zahlenfolge oder Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ [bzw. $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$].*

Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n) oder auch $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Beispiele: (1) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.

(2) $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

(3) $a_n = i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots)$.

Der Begriff der *Konvergenz* ist für die Analysis von zentraler Bedeutung.

6.1 Konvergenz

Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$]. Wir sagen, dass (a_n) gegen a konvergiert und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underbrace{n_0}_{= n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Das bedeutet: "die a_n kommen a beliebig nahe" oder "der Abstand $|a_n - a|$ wird beliebig klein".

Die Zahl a heißt dann Limes oder Grenzwert der Folge (a_n).

Eine Folge (a_n) heißt konvergent, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$] so gibt, dass (a_n) gegen a konvergiert. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

Schreibweisen: Statt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ schreibt man auch $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a_n \to a$.

Beispiel: (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.2 (3) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für jedes $n \geq n_0$ gilt dann:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Wir haben $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nachgewiesen.

(2) Für jede Zahlenfolge (a_n) und jedes a gilt:

$$\lim a_n = a \iff \lim |a_n - a| = 0.$$

Insbesondere ist für $a = 0$:

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0.$$

(3) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent: Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze

$$\varepsilon := \begin{cases} 1/2, & \text{falls } a \in \{1, -1\} \\ 1/2 \cdot \min\{|1-a|, |-1-a|\}, & \text{falls } a \notin \{1, -1\} \end{cases}.$$

Dann gilt $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Folglich konvergiert (a_n) nicht gegen a. Da a beliebig war, ist (a_n) divergent.

(4) Für $b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \iff |b| < 1.$$

Denn für $|b| \geq 1$ gilt $|b^n| = |b|^n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (b^n) konvergiert nicht gegen Null. Für $|b| < 1$ sei $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 4.2 der Bernoullische Ungleichung finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b|^{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $0 \leq |b^n| = |b|^n \leq |b|^{n_0} < \varepsilon$. Also ist $\lim_n b^n = 0$.

Bemerkung 6.1. *(1) Für jede Zahlenfolge (a_n) und jedes a gilt:* $\lim a_n = a \iff \lim |a_n - a| = 0$.

Insbesondere ist für $a = 0$: $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$.

(2) Für $b \in \mathbb{C}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \iff |b| < 1$.

(3) Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

(4) Eine konvergente Folge (a_n) ist beschränkt , dh die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

(5) Ist (z_n) eine komplexe Zahlenfolge, so ist (z_n) genau dann konvergent, wenn die reellen Zahlenfolgen $(Re\, z_n)$ und $(Im\, z_n)$ konvergent sind. Genauer gilt für $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$z_n \to z_0 \iff Re\, z_n \to Re\, z_0 \text{ und } Im\, z_n \to Im\, z_0$$

Wir beschränken uns deshalb weitgehend auf reelle Zahlenfolgen.

Für $p \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man auch $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ als Folge.

Wir sagen, dass eine Eigenschaft für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Eigenschaft für alle $n \geq n_0$ gilt.

6.2 Grenzwertsätze

Seien (a_n), (b_n), (α_n) und (c_n) reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $|a_n - a| \le \alpha_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \Longrightarrow a_n \to a$.

(2) $a_n \to a \Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

(3) $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $a_n \le b_n$ für fast alle $n \Longrightarrow a \le b$.

(4) $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und $a_n \le c_n \le b_n$ für fast alle $n \Rightarrow c_n \to a$.

(5) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$. Ist $b \ne 0$, so ist $b_n \ne 0$ für fast alle n und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Beweis. (1) ist leicht. Für (2) verwendet man $||a_n| - |a|| \le |a_n - a|$ und (1).

Zu (3): Sonst wäre $a > b$, und mit $\varepsilon := (a - b)/2$ ist $a_n > a - \varepsilon \ge b + \varepsilon > b_n$ für fast alle n, Widerspruch.

Zu (4): Ist $\varepsilon > 0$, so gilt für fast alle n: $a_n, b_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, also $a-\varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a+\varepsilon$.

Zu (5): Sei $\varepsilon > 0$. Dann $|a_n - a| < \varepsilon/2$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für fast alle n. Also

$$|a_n + b_n - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

für fast alle n. Bei $(a_n \cdot b_n)$ verwendet man

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

und die Tatsache, dass die konvergente Folge (a_n) beschränkt ist, dh es gibt $M > 0$ mit $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt aus (1) und (5) für "+".

Die Aussage über $(\frac{a_n}{b_n})$ muss man nur für $a_n = 1$ zeigen. Sei dazu $b \ne 0$ und $\delta := |b|/2$. Dann ist $\delta > 0$ und wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \delta$ für alle $n \ge n_0$. Für $n \ge n_0$ gilt dann auch

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \ge |b| - |b - b_n| > 2\delta - \delta = \delta$$

und

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} \le \frac{1}{2\delta^2} \, |b_n - b|,$$

woraus die Behauptung folgt. □

6.3 Monotone Folgen

Eine reelle Folge (a_n) heißt

<u>monoton wachsend</u>,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le a_{n+1}$,
<u>monoton fallend</u>,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \ge a_{n+1}$,
<u>streng monoton wachsend</u>,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$,
<u>streng monoton fallend</u>,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.

Satz 6.1. *Ist eine monoton wachsende [bzw. fallende] reelle Folge* (a_n) *beschränkt, so konvergiert sie, und zwar gegen* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *[bzw.* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*].*

Beweis. Sei (a_n) monoton wachsend und $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$, also auch $|a_n - s| < \varepsilon$. □

Beispiel Wir betrachten die folge $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{|\sin(k)|}{2^k}$. Diese Folge ist streng monoton wachsend. Ferner gilt $a_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$, wobei die letzte Gleichheit in der Übung gezeigt wurde. Also ist die folge monoton wachsend und nach oben beschränkt also konvergent.

6.4 Wichtige Beispiele

(1) $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ und $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass für alle $y > x \geq 0$ gilt $\sqrt[p]{y} - \sqrt[p]{x} \leq \sqrt[p]{y-x}$. [Es ist nämlich nach dem binomischen Satz $(\sqrt[p]{y-x} + \sqrt[p]{x})^p = y - x + \underbrace{\ldots}_{\geq 0} + x \geq y$.]

Wir erhalten somit $|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \sqrt[p]{|a_n - a|}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $b_n := |a_n - a|$, so gilt $b_n \to 0$ und es reicht zu zeigen, dass $\sqrt[p]{b_n} \to 0$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir n_0 mit $b_n < \varepsilon^p$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt dann $0 \leq \sqrt[p]{b_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

(2) $\sqrt[n]{n} \to 1$:

Setze $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann ist $a_n \geq 0$ für alle n, und für $n \geq 2$ gilt:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\, a_n^2,$$

also $0 \leq a_n \leq \sqrt{2}/\sqrt{n-1}$. Es folgt $a_n \to 0$.

Für $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$: Für $c \geq 1$ ist $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$ für fast alle n, und für $c \in (0,1)$ ist $1/\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{c} \leq 1$ für fast alle n. Wende nun 6.3(4) an.

(3) Konvergiert die Folge (a_n) gegen a so gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$. Denn es gilt auch $a_{n+1} \to a$.

Es gilt aber auch z.B. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

woraus $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ folgt, obwohl $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

(4) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $s_n := \sum_{k=0}^n z^k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (s_n) konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist. In diesem Falle gilt $\lim s_n = (1 - z)^{-1}$.

In diesem Falle gilt $\lim s_n = (1-z)^{-1}$. Für $|z| \geq 1$ ist nämlich $|s_{n+1} - s_n| = |z|^{n+1} \geq 1$, und (s_n) konvergiert nicht (verwende (3)). Für $|z| < 1$ ist $s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ nach Übungsaufgabe und also $s_n \to (1-z)^{-1}$ nach Beispiel(4) in Kapitel 6.1.

6.5 Teilfolgen

Ist (a_n) eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (dh $(k(n))$ ist eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen), so heißt die Folge $(a_{k(n)})$ Teilfolge (TF) von (a_n).

Eine Zahl b heißt Häufungswert (HW) der Folge (a_n) , falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen b konvergiert.

Beispiel: $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist Teilfolge von (a_n), hier ist $k(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(a_3, a_1, a_7, a_5, \ldots)$ ist hingegen keine Teilfolge von (a_n).

Beispiele: (1) Gilt $a_n \to a$, so konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen a, dh a ist einziger Häufungswert von (a_n).

(2) Die Folge $((-1)^n)$ hat genau die Häufungswerte 1 und -1: Wegen $a_{2n} \to 1$ und $a_{2n+1} \to -1$ sind 1 und -1 Häufungswerte. Ist $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ und $\varepsilon := \min\{|1-b|, |-1-b|\}/2$, so ist $\varepsilon > 0$ und in $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ liegen keine Folgenglieder. Somit ist b kein Häufungswert von (a_n).

Satz 6.2 ((Bolzano-Weierstraß)). *Jede beschränkte Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge, dh jede beschränkte Zahlenfolge hat einen Häufungswert.*

Bemerkung 6.2. *Der Satz gilt auch für komplexe Zahlenfolgen.*

6.6 Rechnen mit ∞

Sei (a_n) eine reelle Folge.

$$\begin{aligned} a_n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K, \\ a_n \to -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < K. \end{aligned}$$

Also $a_n \to \infty$ $[a_n \to -\infty]$, falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ gilt, dass $a_n > K$ $[a_n < K]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Achtung: Man redet hier nicht von "Konvergenz" und auch nicht von "Grenzwert" , denn $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, dh ∞ und $-\infty$ sind keine **Zahlen**. Man sagt jedoch etwa "die Folge a_n geht gegen unendlich" und schreibt auch $\lim_n a_n = \infty$.

Bemerkung 6.3. *(a) Gilt $a_n \to \pm\infty$, so folgt $|a_n| \to \infty$ und $1/a_n \to 0$. Ist $a_n > 0$ für alle n und $a_n \to 0$, so folgt $1/a_n \to \infty$.*

(b) Ist die reelle Folge (a_n) nicht nach oben [unten] beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ von (a_n) mit $a_{k(n)} \to \infty$ [bzw. mit $a_{k(n)} \to -\infty$].

(c) Für jede monoton wachsende [monoton fallende] Folge (a_n) gibt es $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [bzw. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$] mit $a_n \to a$.

Konventionen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.

Man setzt für $a \in \mathbb{R}$: $a+\infty = \infty$, $a-\infty = -\infty$, sowie für $a > 0$: $a\cdot\infty = \infty$, $a\cdot(-\infty) = -\infty$ und für $a < 0$: $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$.

Außerdem setzt man $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ und $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$.

Achtung: Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ und $\infty - \infty$ sind **nicht definiert!**

Regeln: Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n + b_n &\to a + b, \quad \text{falls} \quad a + b \text{ definiert ist,} \\ a_n \cdot b_n &\to a \cdot b, \quad \text{falls} \quad a \cdot b \text{ definiert ist.} \end{aligned}$$

Beachte, dass Bemerkung (a) oben das Verhalten von $(1/a_n)$ beschreibt.

Definition 6.2. *Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.*

$$\begin{aligned} \sup M = \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach oben beschränkt,} \\ \inf M = -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach unten beschränkt.} \end{aligned}$$

Bemerkung 6.4. *Manchmal findet man auch* $\sup \emptyset := -\infty$ *und* $\inf \emptyset := \infty$.

Bemerkung 6.5. *Man hat also für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} \sup M = \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall K > 0 \, \exists x \in M : x > K, \\ \inf M = -\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall K > 0 \, \exists x \in M : x < -K. \end{aligned}$$

6.7 Limes superior und Limes inferior

Sei (a_n) eine reelle Folge. Ist

$$A := \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \text{ es gibt Teilfolge von } a_k(n) \text{ mit } a_{k(n)} \to a\}$$

dann gilt immer $A \neq \emptyset$. A hat immer ein Maximum M und ein Minimum m, wobei, wenn z.B. $\infty \in A$ dann sagen wir $\max A := \infty$, also der Begriff des Maximums/Minimums hier erweitert den Begriff des Maximums/Minimums einer Teilmenge der reellen Zahlen.

Definition 6.3. *Wir definieren* $\liminf a_n := m, \limsup a_n := M$.

Ist (a_n) beschränkt, dann ist

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist Häufungswert von } a_n\}.$$

Also ist $\liminf a_n$ [bzw. $\limsup a_n$] der kleinste [bzw. größte] Häufungswert von a_n.

Schreib- und Sprechweisen: Man schreibt auch kurz $\limsup_n a_n$ oder $\limsup a_n$, sowie $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}_n a_n$, $\overline{\lim} a_n$ und spricht vom "Limes superior" , entsprechend für $\liminf$ mit $\underline{\lim}$ (" Limes inferior") .

Beispiele: (1) Für $a_n := (-n)^n$ ist $\limsup a_n = \infty$ und $\liminf a_n = -\infty$. Die Folge hat keine Häufungswerte.

(2) Für $a_n := (-1)^n$ ist $\limsup a_n = 1$ und $\liminf a_n = -1$.

(3) Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim a_n = 0$ genau dann, wenn $\limsup a_n = 0$ ist.

(4) Gilt $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, so ist $\limsup a_n = \liminf a_n = a$.

Allgemeiner gilt:

> Ist (a_n) eine reelle Folge und
>
> $A := \{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} : \text{ es gibt eine Teilfolge } (a_{k(n)}) \text{ mit } a_{k(n)} \to a\}$,
>
> so ist $\limsup_n a_n = \max A$ und $\liminf_n a_n = \min A$.

(5) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n := \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}(1 - \frac{1}{n}) & , n \text{ gerade} \\ n(1 + (-1)^{\frac{n+1}{2}}) & , n \text{ ungerade} \end{cases}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{4k} = 1 - \frac{1}{4k} \to 1, \qquad a_{4k+1} = (4k+1)(1-1)0 \to 0,$$
$$a_{4k+2} = -(1 - \frac{1}{4k+2}) \to -1, \qquad a_{4k+3} = (4k+3)(1+1) \to \infty.$$

Wir haben also hier $A = \{1, 0, -1, \infty\}$ und $\limsup_n a_n = \infty$, $\liminf_n a_n = -1$. Man sieht auch z.B. $\limsup_n a_{2n} = 1$, $\liminf_n a_{2n+1} = 0$.

Bemerkung 6.6. *Ist a_n eine Folge und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann gilt*

$$a_n \to a \iff A = a \iff \liminf a_n = \limsup a_n = a.$$

Zusätzlich gilt: $a_n \to a \implies a_{k(n)} \to a$ für alle Teilfolgen $a_{k(n)}$ von a_n

7 Reihen

7.1 Definition und Elementare Eigenschaften

Definition 7.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_N := \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (unendliche) Reihe und wird mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet. Die Zahl s_N heißt N-te Partialsumme oder N-te Teilsumme von $\sum_{n=1}^\infty a_n$.*

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* <u>*konvergent*</u> *[*<u>*divergent*</u>*], falls die Folge* $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *konvergiert [bzw. divergiert]. Ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, so heißt* $\lim_{N\to\infty} s_N$ *der* <u>*Reihenwert*</u> *von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und wird ebenfalls mit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bezeichnet.*

Bemerkung 7.1. *(a) Die Folge* (a_n) *kann hier reell oder komplex sein. Ist* (a_n) *komplex, so heißt die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathit{Re}\, a_n$ <u>*Realteil*</u> *der komplexen Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathit{Im}\, a_n$ *heißt* <u>*Imaginärteil*</u> *von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

(b) Eine komplexe Reihe konvergiert genau dann, wenn ihr Realteil ***und*** *ihr Imaginärteil* ***beide*** *konvergieren. In diesem Fall ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathit{Re}\, a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} \mathit{Im}\, a_n$*, also* $\mathit{Re}\,(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathit{Re}\, a_n$ *und* $\mathit{Im}\,(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathit{Im}\, a_n$*.*

Wichtige Beispiele: (1) Die <u>geometrische Reihe</u> $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, wobei $z \in \mathbb{C}$, konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Für $|z| < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, also ist für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$s_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \ (N \to \infty).$$

Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(3) Die <u>harmonische Reihe</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2N} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}}_{=s_N} + \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\geq \frac{1}{2N}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2N}}_{\geq \frac{1}{2N}} \geq s_N + N\frac{1}{2N} = s_N + \frac{1}{2}.$$

Also ist (s_N) divergent, denn $s_N \to s \in \mathbb{R}$ würde $s_{2N} - s_N \to s - s = 0$ implizieren im Widerspruch zu $s_{2N} - s_N \geq 1/2$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Satz 7.1. *Seien* (a_n) *und* (b_n) *Folgen und* $s_N := a_1 + \ldots + a_N$*,* $N \in \mathbb{N}$*.*

(1) ***Monotoniekriterium:*** *Sind alle* $a_n \geq 0$ *und ist die Folge* $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *beschränkt, so konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent,* $p \in \mathbb{N}$*, so konvergiert* $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{p} a_n$*.*

(3) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent und definiert man* $r_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ *für jedes* $N \in \mathbb{N}$*, so gilt* $r_N \to 0$ $(N \to \infty)$*, dh die "Reihenendstücke" konvergieren gegen Null.*

(4) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, so folgt* $a_n \to 0$*.*

(5) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergent und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(oder in* $\mathbb{C}$*), so konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ *und es gilt* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Beweis. (1) folgt aus Satz 6.1, angewandt auf die monoton wachsende Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

(2) Setzt man $\sigma_N := \sum_{n=p+1}^{N} a_n$ für $N \geq p+1$, so ist $\sigma_N = s_N - s_p \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_p$ $(N \to \infty)$.

(3) Wegen (2) gilt $r_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

(4) Es ist $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$ nach (3) im Kapitel 6.4.

(5) folgt aus dem Grentwertsatz (5) im Kapitel 6.2. □

7.2 Absolut konvergente Reihen

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent , falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert (dh also, falls die Reihe über die Absolutbeträge der a_n konvergiert).

Beispiel: Für $|z| < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergent (wegen $|z^n| = |z|^n$ und Beispiel (1) im Kapitel 7.1).

Satz 7.2. *Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt die "Dreiecksungleichung für Reihen":*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Setzt man $a_n := (-1)^n/n$ und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$ für alle $n, N \in \mathbb{N}$, so stellt man fest, dass $(s_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist mit unterer Schranke $s_1 = -1$ und dass $(s_{2N-1})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist mit oberer Schranke $s_2 = -1/2$. Nach Satz 6.1 konvergieren beide Folgen, und zwar wegen $s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N} \to 0$ gegen denselben Grenzwert. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

7.3 Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

(1) (Majorantenkriterium) Gilt $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) (Minorantenkriterium) Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Für den Beweis von (1) wendet man Satz 7.1(1) und (2) folgt aus (1).

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert, denn $0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert nach dem Beispiel (2) im Kapitel 7.1. Somit konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Weiter ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergent für jedes $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$.

7.4 Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Sei (b_n) eine **monoton fallende** Folge mit $b_n \to 0$. Setzt man $a_n := (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. Wie im Fall $b_n = 1/n$ im letzten Beispiel von Kapitel 7.2. □

7.5 Wurzelkriterium

Sei (a_n) eine Folge und $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

(1) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung 7.2. *Ist $\alpha = 1$, so liefert das Wurzelkriterium keine Entscheidung. Denn z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent und $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n} = \lim 1/\sqrt[n]{n} = 1$, hingegen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent mit $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n^2} = \lim 1/(\sqrt[n]{n})^2 = 1$.*

Beweis. Ist $\alpha < 1$, so wählen wir $\beta \in (\alpha, 1)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also $|a_n| \leq \beta^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\beta \in (0, 1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$, und die Behauptung folgt aus dem Majorantenkriterium.

Ist $\alpha > 1$, so wählen wir $\gamma \in (1, \alpha)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \gamma \geq 1$ für unendlich viele n, also $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $a_n \not\to 0$, und nach Satz 7.1 (4) ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. □

Beispiel: Sei $p \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit dem Wurzelkriterium. Hier ist $a_n = n^p x^n$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n})^p |x| \to |x| \ (n \to \infty).$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ für $|x| < 1$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ gilt $|a_n| = n^p \to \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ ist nach Satz 7.1 (4) divergent.

7.6 Quotientenkriterium

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für n mit $a_n \neq 0$.

(1) Ist $c_n \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(2) Ist $\limsup c_n < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung 7.3. *Konvergiert* (c_n) *gegen* α*, so ist für* $\alpha < 1$ *die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent und für* $\alpha > 1$ *ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent. Im Falle* $\alpha = 1$ *ist* ***keine*** *allgemeine Aussage möglich.*

Beweis. (1) Es sei $c_n \geq 1$ für $n \geq n_0$. Dann ist $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_{n_0}| > 0$ für alle $n \geq n_0$, dh $|a_n| \not\to 0$. Nach Satz 7.1 (4) divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Ist $\alpha := \limsup c_n < 1$, so wähle $\beta \in (\alpha, 1)$. Es gilt dann $c_n \leq \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dh wir finden n_0 mit $c_n \leq \beta$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt

$$|a_n| \leq \beta |a_{n-1}| \leq \ldots \leq \beta^{n-n_0} |a_{n_0}| = \beta^n (|a_{n_0}| \beta^{-n_0})$$

für alle $n \geq n_0$. Wegen $\beta \in (0,1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$, und nach Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so folgt $c_n \geq 1$ für fast alle n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert nach (1). □

7.7 Die Exponentialreihe

Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Die Reihe konvergiert für $z = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$. Setzt man für $z \neq 0$: $a_n := z^n/n!$, so gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Definition 7.2. *Die* <u>*Eulersche Zahl*</u> *ist* $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Satz 7.3. *Es gilt* $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\leq 1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: b_n. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir $\limsup_n a_n \leq e$. Andererseits ist für fixiertes $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

woraus für $n \to \infty$ folgt: $\liminf_n a_n \geq b_m$. Für $m \to \infty$ erhalten wir $\liminf_n a_n \geq e$. Es folgt $a_n \to e$. $\square$

Beweis. Auch hier reicht es, den Fall $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ zu betrachten. Es gilt dann für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \leq \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \leq \sum_{n=0}^{2N} c_n,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut. Das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit sich selber ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Nach dem Satz konvergiert diese Reihe absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

7.8 Das Cauchyprodukt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 7.4. *Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut konvergent**, so ist auch ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.*

Beweis. Auch hier reicht es, den Fall $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ zu betrachten. Es gilt dann für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \leq \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \leq \sum_{n=0}^{2N} c_n,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

7.9 Die Exponentialfunktion

Da die Exponentialreihe nach 7.7 für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir durch

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine Funktion definieren, E heißt die <u>komplexe Exponentialfunktion</u> .

(0) Es gilt $E(0) = 1$ und $E(1) = e$

(1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z)E(w) = E(z + w)$.

[Cauchyprodukt für $a_n = z^n/n!$ und $b_n = w^n/n!$; man hat dann

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

nach dem binomischen Satz. Also der Satz 7.4 gibt die Behauptung.]

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$, sowie $E(z)^n = E(nz)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

[Es ist $1 = E(0) = E(z + (-z)) = E(z)E(-z)$, woraus $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$ folgt. Der Rest folgt aus (1).]

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) \in \mathbb{R}$ und $E(x) > 0$; für $x > 0$ gilt $E(x) > 1$.

[Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $E(x) \in \mathbb{R}$ klar und für $x > 0$ gilt

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1 + x > 1.$$

Also ist für $x < 0$ nach (2): $E(x) = E(-x)^{-1} \in (0, 1)$.]

(4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

[Ist $x < y$, so gilt nach (1) und (3):

$$E(y) = E(\underbrace{y - x}_{>0})\underbrace{E(x)}_{>0} > E(x).]$$

(5) Es ist $\sup\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $\inf\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

[Für jedes $K > 0$ gilt $E(K) \geq 1 + K > K$ (woraus die erste Behauptung folgt) und also auch $0 \leq E(-K) = E(K)^{-1} < 1/K$, woraus die zweite Behauptung folgt.]

(6) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$.

[Dies folgt aus der Definition, sowie der Tatsache, dass $w_n \to w$ für eine komplexe Folge (w_n) impliziert: $\overline{w_n} \to \overline{w}$.]

(7) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $E(x+iy) = E(x)E(iy)$ und $|E(iy)| = 1$.
[Die erste Gleichung folgt aus (1). Mittels (6), (1) und (0) gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$|E(iy)| = \sqrt{E(iy)\overline{E(iy)}} = \sqrt{E(iy)E(-iy)} = \sqrt{E(iy-iy)} = 1.]$$

(8) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt[n]{E(x)} = E(\frac{x}{n})$.
[Es gilt nach (2): $E(\frac{x}{n})^n = E(n\frac{x}{n}) = E(x)$.]
(9) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(\operatorname{Re} z)$.
[Nach (6), (1) und (8) ist:

$$|E(z)| = \sqrt{E(z)\overline{E(z)}} = \sqrt{E(z+\overline{z})} = \sqrt{E(2\operatorname{Re} z)} = E(\operatorname{Re} z).]$$

(10) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt $|E(h) - 1| \leq |h|E(|h|)$.
[Es ist $E(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots$. Also

$$|E(h) - 1| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}| \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{(n-1)!} = |h|E(|h|),$$

womit (10) gezeigt ist.]
(11) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.
[Für $h \neq 0$ haben wir

$$|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n}{(n+1)!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h|E(|h|).]$$

Zum Schluss noch eine sehr wichtige Eigenschaft, die zeigt dass die Exponentialreihe sehr nützlich ist, wenn wir die Exponentialfunktion approximieren wollen
(12) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\Big| \underbrace{E(z)}_{\text{Echter Wert vom Computer nicht berechnenbar}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{n!}}_{\text{Approximation vom Computer berechnenbar}} \Big| \leq \underbrace{\frac{|z|^N}{N!} E(|z|)}_{\text{Abschätzung des Fehlers}}$$

.

Beweis. Es gilt

$$|E(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{n!}| = |\sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n!}| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!},$$

wobei der letzte Schritt aus der Dreiecksungleichung folgt. Mit dem Indexschift $m = N - n$ bekommen wir

$$|E(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{m+N}|}{(m+N)!},$$

und da $(m+N)! \leq m!N!$ bekommen wir

$$|E(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^N |z|^m}{N!m!} = \frac{|z|^N}{N!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} = \frac{|z|^N}{N!} E(|z|),$$

$\square$

Bemerkung und Definition: Wegen (2), (8) und 7.7 gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e^m = E(m), \quad \sqrt[n]{e} = E\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \sqrt[n]{e^m} = E\Big(\frac{m}{n}\Big) = \big(\sqrt[n]{e}\big)^m.$$

Man schreibt deshalb auch $e^z := E(z)$ oder $\exp(z) := E(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

7.10 Sinus und Cosinus

Wir definieren die Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

(0) Es ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$.

(1) **Reihendarstellungen:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots. \end{aligned}$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} E(iz) &= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \dots \\ E(-iz) &= 1 - iz - \frac{z^2}{2} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \dots. \end{aligned}$$

(2) **Eulerformel:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x \in \mathbb{R}$ und $\cos x \in \mathbb{R}$, sowie

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\quad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, also $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. [Aus (1) folgt $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\operatorname{Re} e^{ix} = \frac{1}{2}(e^{ix} + \overline{e^{ix}}) = \cos x \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{1}{2i}(e^{ix} - \overline{e^{ix}}) = \sin x.$$

Somit $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = |e^{ix}|^2 = 1$ nach Eigenschaft (8) der Exponentialfunktion im Kapitel 7.9.]

(4) **Additionstheoreme:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

Abschätzungen:

(4) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\sin h| \leq |h| E(|h|)$.

(5) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\cos h - 1| \leq |h| E(|h|)$.

(6) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\sin h}{h} - 1| \leq |h| E(|h|)$.

(7) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\cos h - 1}{h}| \leq |h| E(|h|)$.

Beweis. Die Abschätzungen folgen aus (10) und (11) im Kapitel 7.9, wenn man beachtet:

$$\begin{aligned} \sin h &= \frac{1}{2i}(E(ih) - 1 - (E(-ih) - 1)), \\ \cos h - 1 &= \frac{1}{2}(E(ih) - 1 + (E(-ih) - 1)), \\ \frac{\sin h}{h} - 1 &= \frac{E(ih) - E(-ih)}{2ih} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{E(ih) - 1}{ih} - 1 + \frac{E(-ih) - 1}{-ih} - 1\right), \\ \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{i}{2}\frac{E(ih) - 1 + E(-ih) - 1}{ih} = \frac{i}{2}\left(\frac{E(ih) - 1}{ih} - 1 - \left(\frac{E(-ih) - 1}{-ih} - 1\right)\right). \end{aligned}$$

□

Man kann die Exponentialfunktion e^z so definieren: $e^z = E(z)$.

7.11 Potenzreihen

Definition 7.3. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine* Potenzreihe (PR) um z_0 *hat die Form* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, *wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Die a_n heißen* Koeffizienten *der Potenzreihe und z_0 heißt* Entwicklungspunkt.

Wir nennen eine Potenzreihe reell*, falls $z_0 \in \mathbb{R}$ und alle a_n reell sind.*

Fragen: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert eine gegebene Potenzreihe? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert eine reelle Potenzreihe?

Beispiele: Die Potenzreihen für exp, sin und cos konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist für $|z| < 1$ absolut konvergent und für $|z| \geq 1$ divergent.

Alle diese Reihen haben als Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Bemerkung 7.4. *Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert für $z = z_0$, dh im Entwicklungspunkt. Setzt man $z = z_0$ ein, erhält man nämlich $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots = a_0$.*

Definition 7.4. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius ist definiert durch*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

Satz 7.5. $|z - z_0| < R \implies$ *Potenzreihe absolut konvergent.*
$|z - z_0| > R \implies$ *Potenzreihe divergent.*

Bemerkung 7.5. *Im Falle $R = 0$ konvergiert die Potenzreihe also nur für $z = z_0$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.*

Im Fall $R = \infty$ ist die Potenzreihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Bemerkung 7.6. *Im Fall $R \in (0, \infty)$ lässt sich für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| = R$ keine allgemeine Aussage treffen:*

(a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, sie divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat Konvergenzradius $R = 1$, für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist sie absolut konvergent.

Satz 7.6. *(Konvergenzradius R über Quotienten): Sei $\sum_{n=0} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Wenn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \infty$, dann $R = \frac{1}{\alpha}$.*

Achtung: $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oder $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ geben nicht, was der Konvergenzradius ist.

Beispiele: (1) Die Potenzreihen für exp, sin, cos haben jeweils Konvergenzradius ∞.

(2) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, ebenso die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$ mit $p \in \mathbb{N}$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat Konvergenzradius $R = 0$.

8 Stetigkeit

8.1 Limes, Definition der Stetigkeit, Kriterien für Stetigkeit

Definition 8.1 (Limes)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, y \in \mathbb{R}$. Wir sagen*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y,$$

wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Bemerkung 8.1. *Der Limes kann ähnlich definiert werden, wenn $f : D \to \mathbb{R}$, mit D Intervall oder endliche Vereinigung von Intervallen [1]. In diesem Fall muss $0 < |x - x_0| < \delta$ durch $x \in D$ und $0 < |x - x_0| < \delta$ ersetzt werden. Im Rest der Vorlesung ist mit D eine solche Menge gemeint. Der Limes kann auch für kompliziertere Mengen definiert werden, aber wir führen hier die Definition nicht ein.*

Beispiel Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ dann $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Definition 8.2. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ [2]. f heißt stetig in x_0, wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heißt stetig, falls sie stetig in y ist $\forall y \in D$.

Beispiele: (i) Die Funktion f des letztes Beispieles ist nicht stetig in 0, weil $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

(ii) Die Exponentialfunktion ist stetig in 0: Aus der Eigenschaft (12) im Kapitel 7.9 für N=1, folgt, dass $|E(x) - 1| \leq |x| E(|x|)$, also $|E(x) - E(0)| \leq |x| E(|x|)$ voraus folgt, dass $\lim_{x \to 0} |E(x) - E(0)| = 0$.

Satz 8.1. *(i) Alle folgende Funktionen sind stetig: Polynome, sin, cos, Exponentialfunktion.*
(ii) f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0) \implies g \circ f$ ist stetig in x_0.
(iii) wenn f, g stetig in x_0, dann $f + g, f \cdot g$ sind stetig in x_0. Wenn dazu $g(x_0) \neq 0$ dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

[1] Hier das Intervall $[a, a] = \{a\}$ ist nicht zu berücksichtigen

[2] Der Begrief der stetigen Funktion kann für D eine beliebige nicht leere Teilemge von $\mathbb{R}$ eingeführt werden (und nicht nur für endliche Verreinigung von Intervallen). Hier führen wir aber diese Definition nicht ein.

Beispiel: Sind $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reelle Polynome, so ist die *rationale* Funktion

$$\frac{p}{q} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

stetig.

Satz 8.2. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \lim f(x_n) = y, \text{ für alle Folgen in } D/\{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0.$$

Beispiel Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. Dann existiert der Limes $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht. Denn die Folgen $a_n = \frac{1}{2n\pi}, b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ aber $f(a_n) = \cos(\frac{1}{a_n}) = 1 \to 1$, und $f(b_n) = \cos(\frac{1}{b_n}) = -1 \to -1$.

8.2 Zwischenwertsatz

Satz 8.3 (Zwischenwertsatz)**.** *Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn $f(a) < f(b)$ $[f(a) > f(b)]$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$ $[f(a) > c > f(b)]$ dann $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = c$.*

Folgerung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein Intervall ist. Dann ist $f(I)$ auch ein Intervall.

Beispiel: Ist $p : R \to \mathbb{R}$ ein normiertes Polynom von ungeradem Grad m (Erinnerung: normiert bedeutet $a_m = 1$), so gilt $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen des Zwischenwertsatzes reicht es zu zeigen, dass $p(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und dass $p(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Die Behauptungen sind klar für $m = 1$. Sei also $m \geq 3$ und $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Für $x \geq 1 + |a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ gilt dann

$$\begin{aligned}
p(x) &\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-2} - \ldots - |a_1|x - |a_0| \\
&\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-1} - \ldots - |a_1|x^{m-1} - |a_0|x^{m-1} \\
&\geq x^{m-1} \underbrace{(x - (|a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|))}_{\geq 1} \\
&\geq x^{m-1} \to \infty \quad (x \to \infty).
\end{aligned}$$

Die Aussage für $x \to -\infty$ zeigt man ähnlich. □

8.3 Einseitige Grenzwerte

Definition 8.3 (Einseitige Grenzwerte)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, y \in \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = y \quad [\text{bzw. } \lim_{x \to x_0-} f(x) = y],$$

wenn $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, *so dass* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *[bzw.* $x_0 - \delta < x < x_0$*]* $\implies |f(x) - y| < \epsilon$. *In diesem Fall heißt* y *rechtsseitiger [bzw. linksseitiger] Limes von* f *in* x_0.

Beispiel: Sei $D = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1) \end{cases}$. Dann gilt $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$.

Satz 8.4. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0, y \in \mathbb{R}$. *Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0 -} f(x) = y \text{ und } \lim_{x \to x_0 +} f(x) = y \right).$$

Beispiel: Sei $D = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$. Wie im letzten Beispiel. Da $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$, existiert der Limes $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht.

Bemerkung 8.2. *Die Definition und der Satz oben sind anwendbar für Funktionen* $f : D \to \mathbb{R}$, *wobei* $D \subset \mathbb{R}$, *wenn es sinnvoll ist,* $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ *und* $\lim_{x \to x_0 +} f(x)$ *zu betrachten.*

Bemerkung 8.3. *Man kann* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *mit* $x_0, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *und* $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = y$ *mit* $x_0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Die Definitionen sind ähnlich wie im Fall von folgen, und die Intuition ist die gleiche.*

8.4 Monotone Funktionen

Definition 8.4. *Sei* $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* f *heißt* monoton wachsend *[bzw.* monoton fallend*], falls für alle* $x_1, x_2 \in D$ *gilt:*

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)].$$

f *heißt* streng monoton wachsend *[bzw.* streng monoton fallend*], falls für alle* $x_1, x_2 \in D$ *gilt:*

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

f *heißt* monoton, *falls* f *monoton wachsend oder monoton fallend ist, und* f *heißt* streng monoton, *falls* f *streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beispiele: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht monoton.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ ist monoton wachsend, aber *nicht streng* monoton wachsend.

Satz 8.5. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

(a) Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].

(b) Ist f zusätzlich stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. zu (a): Injektivität ist klar. Ist f streng monoton wachsend, erhalten wir durch Kontraposition:

$$\forall x_1, x_2 \in I : \; f(x_1) \geq f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

woraus strenge Monotonie von f^{-1} folgt.

zu (b): Wir verwenden Satz 8.2 zum Nachweis der Stetigkeit. Sei $y_0 = f(x_0) \in f(I)$ und $(y_n) = (f(x_n))$ eine monotone Folge mit $y_n \to y_0$. Nach (a) ist dann auch (x_n) eine monotone Folge, die durch x_1 und x_0 beschränkt ist, und somit gegen ein $\alpha \in I$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \to f(\alpha)$. Somit ist $f(\alpha) = y = f(x_0)$ und $x_0 = \alpha$, und wir haben $f^{-1}(y_n) = x_n \to x_0 = f^{-1}(y_0)$ gezeigt. □

Beispiel Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, ist stetig und streng monoton wachsend. Und $f([0, \infty)) = [1, \infty)$. Die Funktion $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch die Formel $f^{-1}(x) = \sqrt{y-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ ist ebenso stetig und streng monoton wachsend.

9 Logarithmus und trigonometrische Funktionen

Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (Exponentialfunktion) ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Definition 9.1 (Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *heißt (*natürlicher*)* Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$*, d.h. also* $\ln x := \exp^{-1}(x)$ *für* $x \in (0, \infty)$*.*

Beispiel Ist $\ln(x) = 2$ dann $x = e^2$.

Eigenschaften: ln ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$, $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$, sowie $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$. Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{und} \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

Definition 9.2 (Die allgemeine Potenz)**.** *Wir definieren für $a > 0$ die allgemeine Potenz:*

$$a^x := \exp(x \ln a) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $a > 0, a \neq 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton, stetig und bijektiv.

Definition 9.3 (Der allgemeine Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion von* a^x *bezeichnet durch* $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *heißt* Logarithmus zur Basis a. *Es ist also* $\log_a(a^x) = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $a^{\log_a y} = y$ *für alle* $y \in (0,\infty)$.

Beispiele (1) $\log_{10} 100 = 2$, denn $10^2 = 100$

(2)$\log_{10}(\sqrt{101} - 1) = 2 - \log_{10}(\sqrt{101} + 1)$, denn

$\log_{10}(\sqrt{101} - 1) + \log_{10}(\sqrt{101} + 1) = \log_{10}[(\sqrt{101} - 1)(\sqrt{101} + 1)] = \log_{10}[(\sqrt{101}^2 - 1^2)] = \log_{10} 100 = 2$

Satz 9.1. *Für alle* $y \in (0,\infty)$ *gilt* $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

Beispiel $\log_{10} y = \frac{\ln y}{\ln 10}$. Also $\log_{10} e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 10} = \frac{2}{\ln 10}$.

Zusätzliche Eigenschaften von Sinus und Cosinus

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:
(i) $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$
(ii)$\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$;
(iii) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (dh sin und cos sind 2π-*periodisch*).
(iv) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; (v) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Nullstellen von sin und cos:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin(k\pi) = 0$.

Beispiele $\cos(3\pi/4) = \cos(\pi - \pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\sin(3\pi/4) = \sin(\pi - \pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$.

$\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Arcussinus, Arcuscosinus, Tangens, Arcustangens

Arcuscosinus Die Funktion $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton fallend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arccos* : $[-1,1] \to [0,\pi]$ und sie heißt Arcuscosinus.

Aus dem Satz 8.5 folgt, dass arccos stetig und streng monoton fallend ist.

Arcussinus Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arcsin* : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und sie heißt Arcussinus.

Beispiele $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, da $\frac{\pi}{6} \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

$\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$, da $\frac{3\pi}{4} \in [0,\pi]$ und $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tangens Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens*. (Beachte, dass die Menge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ genau die Nullstellen des Cosinus enthält.)

Beispiel $\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Arcustangens $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv und ebenso ihre Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ und sie heißt *Arcustangens*.

Beispiel $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ da $-\pi/3 \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $\tan(-\pi/3) = -\tan(\pi/3) = -\sqrt{3}$.

Anwendung (Polarkoordinaten) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0, \infty)$ und genau einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\phi}$. Dabei heißt $r = |z|$ *Länge von* z und $\phi =: \arg z$ heißt das *Argument von* z.

Wie wird $\arg z$ **bestimmt?** Wenn z=a+bi, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z \neq 0$, dann $\phi = \arctan(b/a)$ für $a > 0$, $\phi = sgn(b)\pi/2$ für $a = 0$ ($sgn(b) = \frac{b}{|b|}$), sowie $\phi = \pi + \arctan(b/a)$ für $a < 0$, $b \geq 0$, und $\phi = -\pi + \arctan(b/a)$ für $a, b < 0$.

Beispiele $arg(1 + \sqrt{3}i) = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{1})$, da $\sqrt{3}, 1 > 0$. Also $arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$.

$arg(-1 - \sqrt{3}i) = -\pi + \arctan(\sqrt{3})$, da $-1, -\sqrt{3} < 0$.

Also $arg(-1 - \sqrt{3}i) = -\pi + \pi/3 = -2\pi/3$.

10 Differentialrechnung

10.1 Differentiarbarkeit

Im Rest des Kapitels ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall [3].

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

Definition 10.1. *f heißt in $x_0 \in I$* differenzierbar *(**dbar**), falls der Limes* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existiert in $\mathbb{R}$. Dieser Grenzwert heißt* die Ableitung von f in x_0. *Bezeichnung: $f'(x_0)$.*

Die Funktion f heißt auf I differenzierbar*, falls f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist.*

Bemerkung 10.1. *Es ist* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Beispiele: (1) $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$, ist auf I differenzierbar mit $f' = 0$ auf I.

[3] Aber kein Intervall der Form [a,a]={a}.

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ ist in $x_0=0$ **nicht** differenzierbar, denn für $h\neq 0$ ist

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases} 1 & ,h>0 \\ -1 & h<0 \end{cases}$$

Also existiert $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ nicht.

(3) $I=\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=x^n$. f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$ für jedes $x_0\in\mathbb{R}$. Für $x\neq x_0$ ist nämlich nach Kapitel 4.9 Gleichung (1)

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-1-k}x_0^k\to nx_0^{n-1}\ (x\to x_0).$$

Satz 10.1. *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Da I ein Intervall ist, ist $x_0\in I$ Häufungspunkt von I. Für $x\in I\setminus\{x_0\}$ ist dann

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\to f'(x_0)\cdot 0=0\ (x\to x_0).$$

Also ist f in x_0 stetig. □

Eine Funktion, fie stetig ist in x_0 muss nicht unbedingt differenzierbar in x_0 sein. Zum Beispiel $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=|x|$ ist stetig in 0 aber nicht differenzierbar in 0, wie im vorletzten Beispiel gezeigt.

10.2 Ableitungsregeln

Satz 10.2 (Ableitungsregeln). *(a) Seien $f,g:I\to\mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0\in I$ differenzierbar sind, und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\alpha f+\beta g$ ist differenzierbar in $x_0\in I$ und

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0).$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\qquad\text{Produktregel.}$$

(3) Ist $g(x_0)\neq 0$, so gibt es ein $\delta>0$ mit $g(x)\neq 0$ für alle $x\in J:=I\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Die Funktion $\frac{f}{g}:J\to\mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\qquad\text{Quotientenregel.}$$

(b) Sei $f:I\to\mathbb{R}$ in $x_0\in I$ differenzierbar und $J\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I)\subseteq J$. Sei $g:J\to\mathbb{R}$ in $y_0:=f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\qquad\text{Kettenregel.}$$

Beweis. [Beweis der Kettenregel] Die Idee ist zu schreiben

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da man dabei eventuell durch Null dividiert, setzen wir

$$q : J \to \mathbb{R}, q(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & , y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , y = y_0 \end{cases}.$$

Dann gilt $q(y) \to g'(y_0)$ für $y \to y_0$, also auch $q(f(x)) \to g'(f(x_0))$ für $x \to x_0$, da f in x_0 stetig ist. Außerdem gilt $g(y) - g(y_0) = q(y)(y - y_0)$ für **alle** $y \in J$, also

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = q(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (x \to x_0).$$

□

Beispiele (1) Ist $f(x) = e^{x^2}$ dann f(x)= g(h(x)) wobei $g(x) = e^x$ und $h(x) = x^2$. Da aber $g'(x) = e^x$ und $h'(x) = 2x$ gilt $g'(h(x))h'(x) = e^{h(x)}2x = 2xe^{x^2}$. Also wegen der Kettenregel $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

(2) Sei $a > 0$ und $h(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist h auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h'(x) = (a^x)' = a^x \ln a,$$

da $a^x = e^{x \ln a}$, also wegen der Kettenregel $(a^x)' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

(3) Ist $f(x) = e^x x$, dann $f'(x) = (e^x)'x + e^x(x)' = e^x x + e^x 1 = e^x(x + 1)$.

Satz 10.3 (Satz über die Umkehrfunktion). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Wie wir schon erklärt haben, aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass $f(I)$ ein Intervall ist. Sei $y \in f(I)$ und $x := f^{-1}(y)$. Dann gilt

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (y \to y_0),$$

da wegen der Stetigkeit von f^{-1} aus $y \to y_0$ folgt $x \to x_0$. □

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $g(x) = \ln(x)$. Dann $g(x) = f^{-1}(x)$, wobei $f(x) = e^x$. Also $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\ln(x))}$. Da aber $f'(x) = e^x$, bekommen wir

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

Definition 10.2. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein* lokales Maximum *[bzw.* Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ gilt } f(x) \leq f(x_0) \quad [\text{ bzw. } f(x) \geq f(x_0)].$$

Ein relatives *oder* lokales Extremum *ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum* [4].

Bemerkung 10.2. *Ein Extremum (Maximum oder Minimum) einer Funktion, ist auch ein lokales Extremum der Funktion.*

Satz 10.4. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis des Satzes. Wir nehmen an, dass f in x_0 ein lokales Maximum hat (sonst betrachte $-f$). Wir können weiter annehmen, dass das δ aus der Definition 10.2 mit dem δ aus dem Satz übereinstimmt (sonst betrachte das Minimum von beiden). Für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt dann $f(x) \leq f(x_0)$, also $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ und damit $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ und $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, woraus $f'(x_0) \geq 0$ folgt. Also $f'(x_0) = 0$. □

Korollar 10.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn f differentierbar ist auf (a, b), dann*

$$\max f := \max f([a, b]) = \max f(\{a, b\} \cup A)$$

$$\min f := \min f([a, b]) = \min f(\{a, b\} \cup A),$$

wobei $A = \{x \in (a, b) \text{ mit } f'(x) = 0\}$.

Berechnen Sie Minimum und Maximum der Funktion

$$f : [e^{-1}, e^2] \longrightarrow \mathbb{R}\ , x \mapsto \frac{\ln(x^5)}{x}\ .$$

Lösungsvorschlag Es gilt $f(x) = \frac{\ln(x^5)}{x} = 5\frac{\ln(x)}{x}$. Deshalb $f'(x) = 5\frac{(\ln(x))'x - \ln(x)(x)'}{x^2} = 5\frac{1-\ln(x)}{x^2}$. Daraus folgt, $f'(x) = 0 \iff 1 - \ln(x) = 0 \iff x = e$, und da $e \in [e^{-1}, e^2]$ ist e ein Kandidat für das Minimum oder Maximum. Die anderen Kandidaten sind die Endpunkte und zwar e^{-1} und e^2. Wir berechnen jetzt den Wert der Funktion an diesen drei Punkten.

$f(e) = 5\frac{\ln(e)}{e} = \frac{5}{e}$. $f(e^{-1}) = 5\frac{\ln(e^{-1})}{e^{-1}} = -5e$. $f(e^2) = 5\frac{\ln(e^2)}{e^2} = \frac{10}{e^2}$. Der kleinste von den drei Werten ist $-5e$ und der größte $\frac{5}{e}$ (In der Tat, da $e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} > \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$ gilt $e > 2$ und deshalb $\frac{5}{e} > \frac{10}{e^2}$). Deshalb ist das Minimum der Funktion $-5e$ und das Maximum $\frac{5}{e}$.

[4] In dieser Definition kann I ersetzt werden durch eine Menge die kein Intervall ist.

10.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 10.5. ***Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)*** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Folgerungen des Mittelwertsatzes Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.

(1) f ist auf I konstant $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ auf I.

(2) Ist $f' = g'$ auf I, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.

(3) Ist $f' \geq 0$ [bzw. $f' \leq 0$, $f' > 0$, $f' < 0$] auf I, so ist f auf I monoton wachsend [bzw. monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend].

Beweis. (1) “$\Leftarrow$”: Nach MWS ist $f(b) = f(a)$ für alle $a, b \in I$.

(2) Wende (1) an auf $f - g$.

(3) Ist $f' \geq 0$ auf I, so gilt für $x, y \in I$ mit $x < y$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0$$

für ein $\xi \in (x, y)$. Es folgt $f(y) \geq f(x)$. Die anderen Aussagen beweist man analog. □

Anwendung: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\phi' = a\phi$ auf I, sowie $x_0 \in I$. Dann gilt $\phi(x) = \phi(x_0)e^{a(x-x_0)}$ für jedes $x \in I$: Setzt man $\psi(x) := \phi(x)e^{-ax}$, $x \in I$, so ist nämlich ψ differenzierbar auf I mit $\psi' = 0$ auf I, und somit

$$\phi(x)e^{-ax} = \psi(x) = \psi(x_0) = \phi(x_0)e^{-ax_0} \text{ für jedes } x \in I.$$

Somit hat für feste $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y' = ay \text{ auf } I, \quad y(x_0) = c,$$

genau eine differenzierbare Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\phi(x) = ce^{a(x-x_0)}$, $x \in I$.

10.4 Höhere Ableitungen und Taylorsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (**dbar**).

Definition 10.3. *(a) f heißt in $x_0 \in I$* zweimal differenzierbar*, falls f' in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt*

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die 2. Ableitung von f in x_0*.*

f heißt auf I zweimal differenzierbar*, falls f' auf I differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')'$* zweite Ableitung von f auf I*.*

Entsprechend definiert man im Falle der Existenz $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ etc. bzw. f''', $f^{(4)}$, ...

Definition 10.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt* auf I n-mal stetig differenzierbar*, falls f auf I n-mal differenzierbar ist und $f, f', f'', \ldots, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Dafür schreiben wir $f \in C^n(I)$.*

Außerdem: $f \in C^0(I) = C(I)$, falls f auf I stetig ist, und $f \in C^\infty(I)$, falls $f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dh wenn f auf I beliebig oft differenzierbar ist.

Bemerkung 10.3. *Wenn eine Funktion differentierbar ist, dann ist die Ableitung nicht unbedingt eine stetige Funktion.*

Lemma 10.1. *Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f \in C^n(I)$ mit $f^{(n)}$ auf I differenzierbar. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Ist $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n)}(a) = 0$ und $f(b) = 0$ dann gibt es $c \in (a, b)$ mit $f^{(n+1)}(c) = 0$.*

Beweis. Wir werden das zeigen mit Hilfe des Mittelwertsatzes und mit Induktion in n. Wir zeigen das erst für $n = 0$. Für $n = 0$ gilt $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$ ($f^{(0)} := f$) also wegen des Mittelwertsatzes gibt es $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ (da $f(a) = f(b)$). Also stimmt die Aussage für $n = 0$.

Wir nehmen, dass die Aussage stimmt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i.e. ist $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$ dann gibt es $d \in (a, b)$ mit $f^{(n+1)}(d) = 0$. Wenn aber zusätzlich $f^{(n+1)}(a) = 0$ und $f^{(n+1)}$ dbar ist auf I dann gibt es $c \in (a, d) \subset (a, b)$ mit $(f^{(n+1)})'(c) = \frac{f^{(n+1)}(d)-f^{(n+1)}(a)}{d-a} = 0$ oder $f^{(n+2)}(c) = 0$ was zu zeigen war. Also stimmt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Satz 10.6 (Satz von Taylor)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I differentierbar. Seien $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{n\text{-tes Taylorpolynom } T_n(f;x_0)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{n\text{-tes Restglied } R_n(f,x_0)(x)} . \end{aligned}$$

Beweis des Satzes. Es reicht den Fall $x_0 = 0$, $x > 0$ zu betrachten. Wir definieren $g : [x_0 = 0, x] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := f(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k - m\frac{y^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei wir $m \in \mathbb{R}$ so wählen, dass $g(x) = 0$ ist. Man kann überprüfen mit Hilfe der Definition von g, dass $g(0) = ... = g^{(n)}(0) = 0$. Aus dem Lemma 10.1 folgt, dass es ein $\xi \in (0, x)$ gibt, mit $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Aber aus der Definition von g folgt, dass $g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - m$ also $m = f^{(n+1)}(\xi)$. Das bedeutet, dass

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - f^{(n+1)}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Da aber $g(x) = 0$ folgt die behauptete Gleichung.

□

Beispiel: Wir betrachten $f(x) := \ln(1-x)$ für $x < 1$ und $x_0 = 0$. Hier ist $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$ und also für jedes $k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$. Wir erhalten somit für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(f;0)(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}, \quad x < 1.$$

Das Restglied ist hier

$$-\frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Da ξ zwischen 0 und x liegt, erhalten wir $0 < \frac{x}{1-\xi} \leq \frac{x}{1-x} \leq 1$ für $x \in (0, \frac{1}{2}]$ und $0 \leq |\frac{x}{1-\xi}| \leq |x| \leq 1$ für $x \in [-1, 0]$. Somit geht das Restglied für $n \to \infty$ zumindest für $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ gegen Null, und

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in [-1, \frac{1}{2}].$$

(Tatsächlich gilt dies auch für $x \in (1/2, 1)$). Wir notieren als Spezialfall $(x = -1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2.$$

Definition 10.5. *Falls $f \in C^\infty(I)$, heißt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ Taylorreihe der Funktion f.*

Korollar 10.2. *Sei $f \in C^\infty(I)$, und $x_0 \in I$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f;x_0)(x) \to f(x) \quad \forall x \in I \qquad (\text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) \quad \forall x \in I),$$

genau dann wenn $R_n(f, x_0)(x) \to 0$ für jedes $x \in I$

Wenn die Aussagen des Korollars gelten, ist die Funktion durch ihre Taylorreihe darstellbar.

Warnung: Nicht jede Funktion $f \in C^\infty(I)$ ist durch ihre Taylorreihe darstellbar!

Beispiel: Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & ,x > 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$, in $x_0 = 0$. Es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, also auch $T_n(f;0)(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Für **kein** $x > 0$ gilt somit $T_n(f;0)(x) \to f(x)$!

Satz 10.7 (10.13 Folgerung des Taylorsatzes)**.** *Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$ mit x_0 kein Randpunkt von I. Weiter sei*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ [bzw. $f^{(n)}(x_0) < 0$], so hat f in x_0 ein lokales Minimum [bzw. ein lokales Maximum].

(b) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.

Beweis. $f^{(n)}$ ist stetig auf I mit $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, somit gibt es $\delta > 0$ mit

$$f^{(n)}(\xi)f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \text{für alle } \xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I.$$

Nach dem Satz von Taylor und der Voraussetzung gibt es für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ein $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Nun betrachtet man das Vorzeichen der rechten Seite. □

Beispiel: Sei $p > 1$, $\alpha > 0$. Bestimme das Maximum von $f(x) := \alpha x - x^p/p$ über $x \geq 0$.

Es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. Für $x > 0$ ist $f'(x) = \alpha - x^{p-1}$ und $f''(x) = -(p-1)x^{p-2} < 0$. Weiter ist $f'(x_0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 = \alpha^{1/(p-1)}$ ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(\alpha^{1/(p-1)}) = (1 - \frac{1}{p})\alpha^{p/(p-1)} > 0$. Dies ist das gesuchte Maximum.

Bemerkung 10.4. *Allgemeiner sei $f \in C^2(I)$ mit $f'' \geq 0$ auf I [bzw. mit $f'' \leq 0$ auf I]. Solche Funktionen heißen* konvex *[bzw.* konkav*]. Es gilt dann:*

> Ist $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein globales Minimum [bzw. ein globales Maximum].

Es ist dann nämlich f' auf I nach der Folgerung (3) des Mittelwertsatzes monoton wachsend, also $f' \leq 0$ links von x_0 und $f' \geq 0$ rechts von x_0, dh (wieder nach der Folgerung (3) des Mittelwertsatzes) also f monoton fallend links von x_0 und monoton wachsend rechts von x_0. Wir erhalten so $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$.

Außerdem ist $f \in C^2(I)$ konvex genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

dh wenn die Funktion auf jedem Teilintervall $[x, y]$ unterhalb der Geraden durch $f(x)$ und $f(y)$ liegt.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$ ist in $C^2(\mathbb{R})$ mit $f'(x) = e^x - 1$, $f''(x) = e^x > 0$. Die Funktion f ist konvex und hat bei der einzigen Nullstelle $x_0 = 0$ von f' ein globales Minimum. Da $f(0) = 0$ bekommen wir, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und deshalb $e^x \geq x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

10.5 Die Regeln von de l'Hospital

Satz 10.8 (10.11 **Die Regeln von de l'Hospital**). *Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter sei $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.*

(a) Ist $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$, so gilt

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(b) Ist $\lim_{x\to b} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, so gilt

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Bemerkung 10.5. *Ähnliche Aussage gilt, wenn man (a, b) durch (b, a) ersetzt. In diesem Fall kann $b = -\infty$ anstatt $b = \infty$ betrachtet werden.*

Beispiele: (1) Für $a, b > 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b.$$

Der Ursprüngliche Limes war hier der Form $\frac{0}{0}$.

(2) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Der Ursprüngliche Limes war hier der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

(3) Es ist

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

Der Ursprüngliche Limes war hier der Form $0(-\infty)$, und wir haben ihn in der Form $\frac{-\infty}{\infty}$ umgeschrieben, und dann l'Hospital angewandt.

(4) Aus (3) folgt mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

Bemerkung: In (1), (2), (3) ist es so, dass erst die Existenz des letzten Limes die Existenz des ersten Limes garantiert.

10.6 Ableitung von Potenzreihen

Satz 10.9 (Ableitung von Potenzreihen)**.** *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in (0,\infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ *und*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Dann ist f *auf* I *differentierbar (insbesondere stetig), und*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I.$$

Beispiel: Für $x \in (-1,1)$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist 1. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ist ebenfalls 1. Setzt man

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1,1),$$

so ist g nach Satz 10.9 auf $(-1,1)$ differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \arctan'(x), \quad x \in (-1,1).$$

Wegen $\arctan 0 = 0 = g(0)$ und wegen der Folgerung (2) des Mittelwertsatzes gilt

$$\arctan(x) = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Eine ähnliche Argumentation zeigt

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1).$$

11 Integration

Im Rest der Vorlesung sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. das Bild $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ von f ist beschränkt.

11.1 Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral

Definition 11.1. *$Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt eine Zerlegung von $[a, b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.*

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ setze

$$I_j \ := \ [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j).$$

In Einfachen Worten I_j ist das j-te Intervall der Zerlegung, $|I_j|$ die Länge des Intervalls m_j der Kleinste Wert von f in I_j (oder infimum der Werte, wenn es den kleinsten Wert nicht gibt) und M_j der größte Wert von f in I_j (oder infimum der Werte, wenn es den kleinsten Wert nicht gibt)

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \left[S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \right]$ heißt Untersumme [Obersumme] von f bzgl. Z.

Sei $m := \inf f([a, b])$ und $M := \sup f([a, b])$.

Satz 11.1. *Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen.*

(1) Es gilt $m(b - a) \leq s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \leq M(b - a)$.

(2) Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, so gilt $s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2) \leq S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$.

Definition 11.2. $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z$ *ist Zerlegung von* $[a, b]\}$(*unteres Integral von f über* $[a, b]$)

$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z$ *ist Zerlegung von* $[a, b]\}$(*oberes Integral von f über* $[a, b]$).

Es gilt $m(b - a) \leq s_f \leq S_f \leq M(b - a)$.

Für Beispiele siehe den nächsten Absatz.

11.2 Riemann Integrierbarkeit, Riemann Integral

Definition 11.3 (11.2)**.** *f heißt (Riemann-)*integrierbar *(*ib*) , falls $s_f = S_f$ gilt.*

In diesen Falle heißt

$$\int_a^b f \, dx := \int_a^b f(x) \, dx := S_f (= s_f)$$

*das (Riemann-)*Integral *von f über $[a, b]$.*

Beispiele: (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Dann ist $m = M = c$ und aus Satz 11.1 (1) folgt $s_f = S_f = c(b-a)$. Also ist f integrierbar und

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

(2) Sei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Ist $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[0,1]$ und sind m_j, M_j, I_j wie oben, so haben wir $m_j = 0$, $M_j = 1$ für alle j [5], also $s_f(Z) = 0$ und $S_f(Z) = 1$. Folglich ist

$$s_f = 0 \neq 1 = S_f,$$

und f ist nicht integrierbar über $[0,1]$.

(3) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x$. Wir betrachten die Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Dann

$$S_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

wobei die zweite Gleichheit gilt einfach, weil $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Die erste Gleichheit gilt weil $\frac{1}{n}$ die Länge des Intervalls $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ ist und $\frac{k}{n} = \sup_{x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} f(x)$. Daraus und aus der Definition von S_f folgt, dass $S_f \leq \inf_{n \in N} S_f(Z_n) = \inf_{n \in N} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Ähnlich bekommt man

$$s_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k-1}{n} = \frac{n-1}{2n}.$$

und deshalb $s_f \geq \sup_{n \in N} s_f(Z_n) = \sup_{n \in N} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$. Also $s_f \leq S_f \leq \frac{1}{2} \leq s_f$ deshalb $S_f = s_f = \frac{1}{2}$ und aus diesem Grund ist f integrierbar auf $[0,1]$ und $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

(4) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x^2$. Wir betrachten wieder die Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Dann

$$S_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2},$$

wobei die zweite Gleichheit gilt einfach, weil $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (zeigen Sie das mit Induktion!). Die erste Gleichheit gilt weil $\frac{1}{n}$ die Länge des Intervalls $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ ist und $(\frac{k}{n})^2 = \sup_{x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} f(x)$. Daraus und aus der Definition von S_f folgt, dass $S_f \leq \inf_{n \in N} S_f(Z_n) = \inf_{n \in N} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$.

[5] Hier wird benutzt, dass jedes Intervall (mit mindestes zwei Punkten) rationale und irrationale Zahlen enthält.

Ähnlich bekommt man

$$s_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

und deshalb $s_f \geq \sup_{n\in N} S_f(Z_n) = \sup_{n\in N} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$. Also $s_f \leq S_f \leq \frac{1}{3} \leq s_f$ deshalb $S_f = s_f = \frac{1}{3}$ und aus diesem Grund ist f integrierbar auf $[0,1]$ und $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Definition 11.4. $R[a,b] := \{g : [a,b] \to \mathbb{R} : g$ *beschränkt und integrierbar*$\}$

Für eine Zerlegung Z, definieren wir

$$\|Z\| := \max\{|I_j| : j = 1,2,\ldots,n\} \text{ (\underline{Feinheit von } \underline{Z}).}$$

In Einfachen Worten ist $\|Z\|$ die Länge des größten Intervalls der Zerlegung. Ein n-Tupel $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ heißt passender Zwischenvektor, wenn $\xi_j \in I_j$ für jedes $j = 1,\ldots,n$ gilt. Für einen solchen ξ heißt

$$\sigma_f(Z,\xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine Riemannsche Summe . Wegen $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$ gilt dabei $s_f(Z) \leq \sigma_f(Z,\xi) \leq S_f(Z)$.

Satz 11.2 (11.7)**.** *Sei* $f \in R[a,b]$ *und* $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Zerlegungen mit* $\|Z_l\| \to 0$, *sowie* $(\xi^{(l)})$ *eine Folge von passenden Zwischenvektoren. Dann gilt*

$$\lim_{l\to\infty} \sigma_f(Z_l,\xi^{(l)}) = \int_a^b f\,dx.$$

Bemerkung 11.1. *Der Satz beschreibt wie ein Integral approximiert werden kann (z.B. mit Computer). Das ist nützlich, wenn es unmöglich ist das Integral explizit zu berechnen.*

Beispiel: (i) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$. Wir werden sehen, dass $f \in R[0,1]$. Sei $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Dann ist die Folge $\xi^{(n)} = \{\frac{1/2}{n}, \frac{3/2}{n}, \frac{5/2}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}\}$ eine Folge passender Zwischenvektoren. Die Zugehörigen Riemannschen Summen sind $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{(k-1/2)^2}{n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$ (zeigen Sie das mit Induktion!). Bemerkenswert ist das der Fehler der Approximation $\frac{1}{12n^2}$ deutlich kleiner ist als der Fehler der Approximation mit den Ober und Untersummen, die im vorherigen Beispiel berechnet wurden.

11.3 Eigenschaften des Riemann Integrals

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a,b]$ dann $f \in R[a,b]$ und $\int_a^b f\,dx = c(b-a)$.
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar, d.h. $f \in R[a,b]$.

Seien $f, g \in R[a,b]$. Dann

(1) Gilt $f \leq g$ auf $[a,b]$, so ist $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.
(2) $fg \in R[a,b]$ und für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

(3) $|f| \in R[a,b]$ und $\left| \int_a^b f\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx$ (Dreiecksungleichung für Integrale).

(4) Wenn $a < c < b$ dann $f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$ und $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.

Im Rest des Kapitels ist I ein Intervall.

Definition 11.5 (11.11)**.** *Sind $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei F auf I differenzierbar ist mit $F' = f$ auf I, so heißt F eine* Stammfunktion von f auf I.

Beispiel: Seien $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $f(x) = e^x \cos(x)$ und $g(x) = \frac{1}{2} e^x(\sin(x) + \cos(x)) + 5$. Dann folgt aus der Produktregel, dass $g'(x) = f(x)$ auf $\mathbb{R}$. Also ist g eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}$.

11.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Partielle Integration, Integration durch Substitution

Satz 11.3 (11.10 **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
(1) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ ist eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$.
(2) Ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \quad \left(=: G(x)\Big|_a^b =: [G(x)]_a^b \right).$$

Beweis. (2) folgt aus (1). Sei $\varepsilon > 0$. Da f in x_0 stetig ist, finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für $|h| < \delta$ mit $x_0, x_0 + h \in [a,b]$ gilt wegen $h^{-1} \int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dx = 1$:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiele: (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) := x^n$ sowie $G(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist G auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $G'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Für $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist $f \in R[a,b]$. Definiert man

$F = \int_a^x f(t)dt$, so ist F auf $[a,b]$ differenzierbar mit $F' = f$ auf $[a,b]$. Nach der Folgerung (2) des Mittelwertsatzes ist $G - F$ konstant, also

$$\int_a^b x^n \, dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

(ii) Da $(\frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x)))' = e^x \cos(x)$, bekommen wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) = \left(\frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x))\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{\pi/2}(\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2))\right) - \left(\frac{1}{2}e^0(\cos(0) + \sin(0))\right) = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

Für eine Stammfunktion von f schreibt man auch $\int f(x)dx$ (<u>unbestimmtes Integral</u>) .

Satz 11.4 (**<u>Partielle Integration</u>**). *Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt*

$$\int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx \quad \text{auf } I.$$

Ist $I = [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

Beweis. Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$ auf I. Somit hat $f'g + fg'$ die Stammfunktion fg auf I, woraus die Behauptungen folgen (für die zweite Formel verwenden wir den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). □

Beispiele: (1) $\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{e^x}_{f'} \, dx = \underbrace{x}_{g} \underbrace{e^x}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{e^x}_{f} \, dx = xe^x - e^x.$

(2) $\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, dx = \underbrace{x}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \, dx = x \ln x - x.$

Satz 11.5 (11.13 **<u>Integration durch Substitution</u>**). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in I$ $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $u \in C^1(I)$ mit $u(I) \subseteq I$. Ist F eine Stammfunktion von f auf I dann gilt*

(i) $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du = F(u(b)) - F(u(a))$.

Beweis. Wähle eine Stammfunktion F von f auf I. Dann ist $G := F \circ u$ eine Stammfunktion von $h := (f \circ u) \cdot u'$ auf J (denn $G' = (F \circ u)' = (F' \circ u)u' = (f \circ u)u'$). Also ist

$$\int (f \circ u)(x) \cdot u'(x)\, dx = G(x) + c = F(u(x)) + c$$

auf I. Nun müssen wir den Hauptsatz der Differential und Integral Rechnung anwenden. $\square$

Merkregel: Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für die Ableitung y' auch $\frac{dy}{dx}$. In $\int f(x)\, dx$ substituiere nun $x = g(t)$, dh fasse x als Funktion von t auf. Dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ und man erhält (formal!) "$dx = g'(t)\, dt$" (dies ist nur eine Schreibweise, da "dx" oder "dt" hier **keine mathematische Bedeutung** tragen).

Beispiele: (1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\, dx$, substituiere $t = e^x$, also $x = \ln t$. Dann ist $dx = dt/t$ und aus $x : 0 \to 1$ ergibt sich $t : 1 \to e$. Wir erhalten:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\, dx = \int_1^e (1 + t^{-2})\, dt = (t - t^{-1})|_1^e = e - 1/e.$$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$, das ist der Flächeninhalt einer Viertelkreisscheibe mit Radius 1. Substituiere $x = \sin t$. Dann ist $dx = \cos t\, dt$ und aus $x : 0 \to 1$ ergibt sich $t : 0 \to \pi/2$. Wir erhalten

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt,$$

da $\cos \geq 0$ auf $[0, \pi/2]$ ist. Nun schreiben wir

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1,$$

also $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$, und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi/2} 1\, dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\, dt}_{=0}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

Der Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Radius 1 is also π.

(3) $\int xe^{-x^2}\, dx$, substituiere $u = x^2$, also $2x\, dx = du$ bzw. $x\, dx = \frac{du}{2}$. Dann ist

$$\int xe^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{-u}\, du\Big|_{u=x^2} = -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{u=x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Mittels partieller Integration kann man nun berechnen:

$$\int x^3 e^{-x^2}\, dx = \int \underbrace{x^2}_{g} \cdot \underbrace{xe^{-x^2}}_{f'}\, dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Man kann auf diese Weise Stammfunktionen bestimmen von $x^n e^{-x^2}$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$. Für gerade $n \in \mathbb{N}$ gibt es diese Stammfunktionen nicht in geschlossener Form.

(4) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$, substituiere $e^x = y$, also $x = \ln y$ und $dx = \frac{dy}{y}$, wobei man $y > 0$ beachte:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{(1+y)y}\,dy\Big|_{y=e^x}.$$

Zur Umformung des Integranden macht man den Ansatz

$$\frac{1}{(1+y)y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}.$$

Multipliziert man mit y und setzt $y = 0$, so erhält man $A = 1$. Multipliziert man mit $1+y$ und setzt $y = -1$, so erhält man $B = -1$. Das ist ein Spezialfall der Partialbruchzerlegung ($\rightarrow$ nächstes Semester). Wir haben also

$$\int \frac{1}{(1+y)y}\,dy\Big|_{y=e^x} = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\,dy\Big|_{y=e^x} = (\ln y - \ln(1+y))\Big|_{y=e^x} = x - \ln(1+e^x).$$

12 Uneigentliche Integrale

In dieser Vorlesung:

(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sei f über jedes Intervall $[a, b] \subseteq I$ integrierbar.

(2) Es seien stets $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\alpha < b$ und $a < \beta$.

13.4 **Konvergenz uneigentlicher Integrale** Sei $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ (bzw. $(\alpha, b] \to \mathbb{R}$) eine Funktion. Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)\,dx$ (bzw. $\int_\alpha^b f(x)\,dx$) heißt konvergent, falls der Limes $\lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx$ (bzw. $\lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx$) existiert und reell ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx \quad \Big(\text{bzw.} \quad \int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx\Big).$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

Beispiele: (1) Sei $\gamma > 0$. Dann gilt für jedes $r > 1$:

$$\int_1^r \frac{1}{x^\gamma}\,dx = \begin{cases} \ln r & ,\gamma = 1 \\ \frac{r^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} & ,\gamma \neq 1 \end{cases},$$

also ist $\int_1^\infty x^{-\gamma}\,dx$ konvergent genau dann, wenn $\gamma > 1$ ist. In diesem Fall ist das Integral $= 1/(\gamma - 1)$.

(2) Für $r > 0$ gilt

$$\int_0^r \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan r \to \frac{\pi}{2} \quad (r \to \infty).$$

Also ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergent und $= \pi/2$.

(3) Sei $\gamma > 0$. Dann gilt für $r \in (0,1)$:

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\gamma}\,dx = \begin{cases} -\ln r & ,\gamma = 1 \\ \frac{1-r^{1-\gamma}}{1-\gamma} & ,\gamma \neq 1 \end{cases},$$

also ist $\int_0^1 x^{-\gamma}\,dx$ konvergent genau dann, wenn $\gamma < 1$ ist. In diesem Fall ist das Integral $= 1/(1-\gamma)$.

(4) Analog zu (2): $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ist konvergent und $= \pi/2$.

Definition 12.1. *Sei $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das* uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *heißt konvergent, falls es ein $c \in (\alpha,\beta)$ so gibt, dass die uneigentlichen Integrale $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\beta f(x)\,dx$ **beide** konvergent sind. In diesem Fall setzt man*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx,$$

und die Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha,\beta)$.

Das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt divergent, falls $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ nicht konvergent ist.

Beispiele: (5) Sei $\gamma > 0$. Nach den Beispielen (1) und (3) ist $\int_0^\infty x^{-\gamma}\,dx$ divergent.

(6) Nach den Beispielen (2) und (4) ist $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergent und $= \pi$.

(7) $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ ist divergent, da $\int_0^\infty x\,dx$ divergent ist. Z.B. konvergiert aber $\int_{-b}^b x\,dx = 0$ für $b \to \infty$ gegen 0.

Definition 12.2 (Absolut konvergente uneigentliche Integrale)**.** *Ein uneigentliches Integral $\int_I f(x)\,dx$ (Integral über das Intervall I) heißt absolut konvergent, falls $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent ist.*

Satz 12.1 (13.7)**.** *(1) Ist $\int_I f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ konvergent und*

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx.$$

*(2) **Majorantenkriterium:** Ist $|f| \leq g$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ konvergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ absolut konvergent.*

*(3) **Minorantenkriterium:** Ist $f \geq g \geq 0$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ divergent.*

Beispiele: (1) $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$; setze $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}$ und $g(x) := x^{-3/2}$. Dann gilt $|f(x)| = f(x) \le g(x)$ für jedes $x \ge 1$. Da $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ konvergiert, konvergiert auch $\int_1^\infty f(x)\,dx$ und es gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \int_1^\infty g(x)\,dx = 2.$$

(2) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)}\,dx$; setze $g(x) = 1/x$. Dann gilt $f(x)/g(x) = \frac{x^2}{x^2+7x} \to 1$ $(x \to \infty)$ und wir finden $c \ge 1$ mit $f/g \ge 1/2$ auf $[c, \infty)$, dh es gilt $f(x) \ge g(x)/2 = (2x)^{-1}$ für alle $x \ge c$ (man kann hier $c = 7$ nehmen, wie man direkt einsieht). Da $\int_c^\infty (2x)^{-1}\,dx$ divergiert, divergiert auch $\int_c^\infty f(x)\,dx$, und somit divergiert auch $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Index