Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Teil: Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

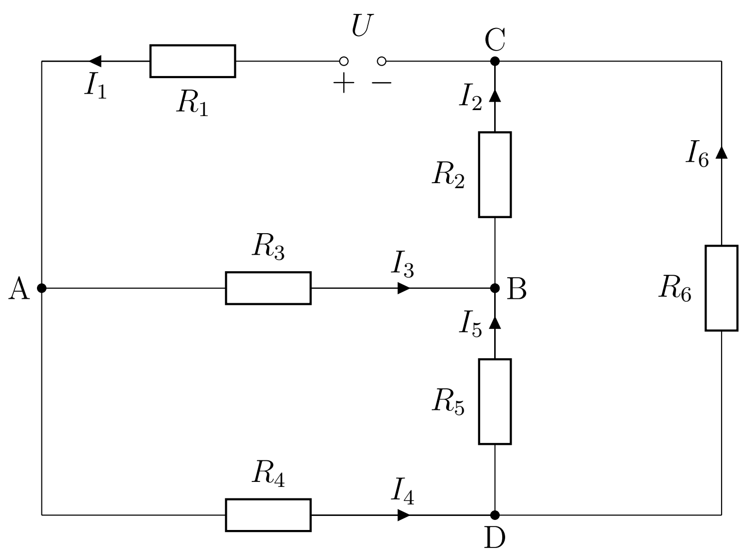
Dies ist eine kurze Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Beispiele, Erläuterungen und veranschaulichen- den Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

Contents

1 Grundzüge der linearen Algebra

Beispiel zur Motivation Wir betrachten das folgende elektrische Netzwerk mit elektromotorischer Kraft U:



Wir stellen die beschreibenden Gleichungen nach den Kirchhoffschen Regeln auf:

- *Knotenregel:* In jedem Knoten ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.
- *Maschenregel:* In jeder Masche ist die Summe der Spannungsabfälle über den Widerständen gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte.

Dabei nehmen wir an, dass U und $R_1, R_2, \ldots, R_6$ bekannt sind, und wollen die Ströme $I_1, I_2, \ldots, I_6$ bestimmen. Durch Betrachtung der Knoten A, B, C, D bzw. der Maschen ABC, ABD, BCD, ADC erhalten wir die Gleichungen

$$
\begin{array}{cccccccc}
I_1 & & -I_3 & -I_4 & & & = & 0 \\
 & -I_2 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\
-I_1 & +I_2 & & & & +I_6 & = & 0 \\
 & & & I_4 & -I_5 & -I_6 & = & 0 \\
R_1 I_1 & +R_2 I_2 & +R_3 I_3 & & & & = & U \\
 & & R_3 I_3 & -R_4 I_4 & -R_5 I_5 & & = & 0 \\
 & R_2 I_2 & & & +R_5 I_5 & -R_6 I_6 & = & 0 \\
R_1 I_1 & & & +R_4 I_4 & & +R_6 I_6 & = & U.
\end{array}
$$

Das ist ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) mit acht Gleichungen für die sechs Unbekannten $I_1, \ldots, I_6$. Die natürlichen Fragen sind zunächst die nach **Existenz** und **Eindeutigkeit** der Lösung und ggf. die nach deren **Berechnung**.

Bemerkung: Man kann hier sehen, dass zB Addition der ersten drei Gleichungen (bis aufs Vorzeichen) die vierte Gleichung ergibt und Addition der letzten drei Gleichungen die fünfte ergibt. Es gibt hier also redundante Gleichungen. Wir kommen auf dieses Phänomen zurück.

Lineare Gleichungssysteme treten in vielen Zusammenhängen auf. Wir werden sie in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ schreiben, wobei der *Vektor* $\vec{x}$ gesucht wird und der Vektor $\vec{b}$ und die *Matrix* A gegeben sind. Im Beispiel ist $\vec{x} = (I_1, I_2, \ldots, I_6) \in \mathbb{R}^6$ gesucht, die rechte Seite ist $\vec{b} = (0, 0, 0, 0, U, 0, 0, U) \in \mathbb{R}^8$ und A ist die *Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 6}$$

mit acht Zeilen und sechs Spalten. Wir kümmern uns zunächst um die Struktur von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.

In diesem Kapitel schreiben wir $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Alle Aussagen Definitionen unten sind anwendbar wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1.

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{K} \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Wir definieren

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

durch komponentenweise *Addition bzw. komponentenweise Multiplikation mit* α*, dh durch*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Der Punkt $\cdot$ für die Multiplikation mit Skalaren wird gewöhnlich weggelassen.

Für die **Anschauung** besonders wichtig sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Beispiele im $\mathbb{R}^2$: $(1, 1) + (0, 1) = (1, 2)$, $2 \cdot (1, -1) = (2, -2)$.

Beispiel im $\mathbb{R}^3$: $(1, 5, 8) + 4 \cdot (3, 2, 1) = (1, 4, 5) + (12, 8, 4) = (13, 12, 9)$.

1.1 Vektorraumaxiome

Setzen wir $V = \mathbb{K}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, so haben $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ die folgenden Eigenschaften:

$(V1)$ $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x, y, z \in V$ (Assoziativität),
$(V2)$ $x+y = y+x$ für alle $x, y \in V$ (Kommutativität),
$(V3)$ es gibt eine $0 \in V$ mit $x+0 = x$ für alle $x \in V$ (Existenz der Null),
$(V4)$ für jedes $x \in V$ gibt es ein $-x \in V$ mit $x+(-x) = 0$ (Existenz des Negativen),
$(V5)$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$ (Assoziativität der Multiplikationen),
$(V6)$ $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ und $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ (Distributivität),
$(V7)$ $1x = x$ für alle $x \in V$ (Kompatibilität).

Definition 1.2. *Ist $V \neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, für welche die Eigenschaften $(V1)$–$(V7)$ gelten, so heißt V ein* <u>*Vektorraum über $\mathbb{K}$*</u> *oder ein* <u>*$\mathbb{K}$-Vektorraum*</u> *($\mathbb{K}$-VR). Die Elemente eines Vektorraumes heißen* <u>*Vektoren*</u> *.*

Beispiele: $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, aber auch: $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, insbesondere ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Die Menge $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der reelwertigen funktionen reeler Variable ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sind $f, g \in M$ mit $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^2$ dann $(3f+5g)(x) = 6x+5x^2$.

Allgemein: jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bemerkung: Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so ist das Element $0 \in V$ in $(V3)$ und für jedes $x \in V$ das Negative $-x$ in $(V4)$ eindeutig bestimmt. Außerdem gilt für alle $x \in V$: $0 \cdot x = 0$ und $-x = (-1) \cdot x$.

Beweis: Die Aussagen zu $(V3)$ und $(V4)$ zeigt man wie in **??**. Sei nun $x \in V$. Es ist $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x)$, also

$$0 \overset{(V4)}{=} 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) \overset{(V1)}{=} 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) \overset{(V4)}{=} 0 \cdot x + 0 \overset{(V3)}{=} 0 \cdot x.$$

Weiter ist

$$x + (-1) \cdot x \overset{(V7)}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \overset{(V6)}{=} (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x \overset{(s.o.)}{=} 0,$$

also $(-1) \cdot x = -x$.

1.2 Untervektorräume und linearer Aufspann

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 1.3. *Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt* <u>*Unter(vektor)raum*</u> *oder* <u>*linearer Teilraum*</u> *von V, wenn*
(i) $U \neq \emptyset$ ist und
(ii) für alle $x, y \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt: $x+y \in U$ und $\alpha x \in U$.

Bemerkung: Die Bedingung (i) kann man ersetzen durch $0 \in U$.

Beispiele: (0) Jeder Vektorraum V hat die trivialen Untervektorräume $\{0\}$ und V.

(1) $\{(x,0,0) : x \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^3$.

(2) Sind $x, y \in \mathbb{K}^n$, so ist $\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$. Ein konkreteres Beispiel: $(1,2,2), (5,6,3) \in \mathbb{R}^n$ also ist die Menge $\{\alpha \cdot (1,2,2) + \beta \cdot (5,6,3) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + 5\beta, 2\alpha + 6\beta, 2\alpha + 3\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(3) $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, nicht abgeschlossen unter $+$.

(4) $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. C ist zwar abgeschlossen unter $+$, aber $-x \notin C$ für $x \in C \setminus \{0\}$.

(5) Die Menge $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Die Menge $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(6) Die nichttrivialen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geraden durch $\vec{0}$, in $\mathbb{R}^3$ kommen Ebenen durch $\vec{0}$ hinzu.

Bemerkung: Sind U_1, U_2 Untervektorräume des Vektorraumes V, so sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ Untervektorräume von V.

Definition 1.4. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren aus V. Eine <u>Linearkombination</u> (<u>LK</u>) der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist ein Vektor der Form*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq M \subseteq V$, so ist

$$lin(M) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in M \Big\}$$

ein Untervektorraum von V, genannt der <u>von M erzeugte Untervektorraum</u> / <u>lineare Aufspann von M</u> .

Beispiele: (1) In $\mathbb{R}^3$ ist der Vektor $(2,4,6)$ Linearkombination von $(1,0,1)$ und $(0,1,1)$ da $(2,4,6) = 2 \cdot (1,0,1) + 4 \cdot (0,1,1)$.

(2)In $\mathbb{R}^3$ ist der Vektor $(2,4,5)$ keine Linearkombination von $(1,0,1)$. Wenn es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ gäbe, so dass und $(2,4,5) = \alpha \cdot (1,0,1) + \beta \cdot (0,1,1)$ dann hätten wir $(2,4,5) = \alpha \cdot (\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ also $\alpha = 2, \beta = 4$ und $\alpha + \beta = 5$. Was unmöglich ist

(3) Aus den letzten zwei Beispielen folgt,$(2,4,6) \in \text{lin}(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$ und $(2,4,5) \notin \text{lin}(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$.

(4) Mit Argumentation ähnlich wie im Beispiel (2) bekommt man, dass $\text{lin}(\{(1,0,1),(0,1,1)\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$.

(5) In $V = \mathbb{R}^2$ gilt $\mathrm{lin}(\{(1,0)\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

(6) In $V = \mathbb{R}^2$ gilt $\mathrm{lin}(\{(1,0),(0,1)\}) = \mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$.

Bemerkung: (1) $\mathrm{lin}(M)$ besteht aus allen Linearkombinationen von Vektoren aus M.

(2) $\mathrm{lin}(M)$ ist der *kleinste* Untervektorraum von V, der M enthält. Insbesondere ist U ein Untervektorraum von V genau dann, wenn $\mathrm{lin}(U) = U$ gilt.

1.3 Affine Teilräume

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt affiner Teil- oder Unterraum von V, falls es einen Untervektorraum U von V und ein $v \in V$ gibt mit

$$W = v + U = \{v + u : u \in U\}.$$

Beispiel: In $\mathbb{R}^2$ sei $(a,b) \neq (0,0)$. Dann ist $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ ein Untervektorraum (Gerade durch $(0,0)$ und $W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 1\}$ ein affiner Teilraum. Ist speziell $(a,b) = (1,1)$, so ist U die durch $y = -x$ gegebene Gerade und W ist die durch $y = -x + 1$ gegebene Gerade, man sieht hier z.B. $W = (1,0) + U$.

1.4 Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 1.5. *Man ninnt n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig , falls für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie linear abhängig . Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind also genau dann linear abhängig, wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gibt, die nicht alle $= 0$ sind, mit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$.

Beispiele: (1) v ist linear unabhängig genau dann, wenn $v \neq 0$ gilt.

(2) Die Vektoren $(1,0), (0,1), (1,1)$ sind linear abhängig, denn $(1,0)+(0,1)-(1,1) = (0,0)$.

(3) In $\mathbb{R}^2$ sind $(1,0), (0,1)$ linear unabhängig, weil $\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \implies (\alpha, \beta) = (0,0) \implies \alpha = \beta = 0$.

(4) In $\mathbb{K}^n$ sind die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ linear unabhängig. Hierbei ist

$$\vec{e}_j := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0) \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Mithilfe des *Kroneckersymbols* $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$ ist also $\vec{e}_j = (\delta_{jk})_{k=1}^n$. Die lineare Unabhängigkeit kann ähnlich gezeigt werden, wie im letzten Beispiel.

1.5 Zeilenumformungen, Zeilenstufenform, Zeilennormalform

Seien n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus dem $\mathbb{K}^m$ gegeben, deren lineare Unabhängigkeit wir untersuchen wollen. Dabei sei $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jm})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Wir schreiben die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als **Zeilen** in eine Matrix A, dh

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist eine $n \times m$-Matrix mit n Zeilen und m Spalten. Wir schreiben dafür $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

Die Matrix A bringen wir in eine Form, an der wir die lineare Unabhängigkeit der Zeilen ablesen können, mittels der folgenden Zeilenumformungen für eine gegebene $n \times m$-Matrix B mit Zeilen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^m$:

(Z1) Ersetze eine Zeile w_j durch αw_j, wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
(Z2) Ersetze eine Zeile w_j durch $w_j + \beta w_k$, wobei $\beta \in \mathbb{K}$ und $k \neq j$
(Z3) Vertausche die Zeilen w_j und w_k, wobei $j \neq k$.

Bemerkung 1.1. *Die Zeilen von B sind genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilen der umgeformten Matrix linear unabhängig sind.*

Satz 1.1. *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ kann man durch endlich viele Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times m}$ überführen, die in Zeilenstufenform (ZSF) ist. Dabei heißt*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform, falls es ein $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq m$ gibt mit
(i) für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$;
(ii) für $j = r + 1, \ldots, n$ gilt $c_{jk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, m$.

Man braucht dafür sogar nur Umformungen der Art (Z2) und (Z3).

Beispiel für Zeilenstufenform mit $n = 5$ und $m = 8$ und $r = 4$, hierbei seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \neq 0$ und $*$ ist ein beliebiger Eintrag:

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis des Satzes betrachtet man zunächst die erste Spalte von C.

1) Ist $c_{11} \neq 0$, so setzt man $\gamma_1 := c_{11}$ und zieht für $j = 2, \ldots, n$ von der j-ten Zeile das c_{j1}/γ_1-fache der ersten Zeile ab (dh man wendet $(Z3)$ an). Man erhält so eine neue Matrix $\tilde{C}$ mit Nullen in der ersten Spalte unterhalb von γ_1:
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ 0 & \tilde{c}_{22} & \cdots & \tilde{c}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{c}_{n2} & \cdots & \tilde{c}_{nm} \end{pmatrix},$$
und macht mit der Matrix weiter, die man durch "Streichen" der ersten Zeile und ersten Spalte von $\tilde{C}$ erhält.

2) Ist $c_{11} = 0$ und $c_{j1} \neq 0$ für ein $j \in \{2, \ldots, n\}$, so vertauscht man die erste und die j-te Zeile (dh man wendet $(Z2)$ an und mache bei 1) weiter.

3) Ist $c_{j1} = 0$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n$, so wendet man das Verfahren an auf die Matrix, die durch "Streichen" der ersten Zeile von C entsteht.

Das Verfahren wird nun solange wiederholt, bis Zeilenstufenform erreicht ist. "Streichen" soll hier nur bedeuten, dass die entsprechenden Zeilen bzw. Spalten nicht mehr verändert werden.

Folgerung aus dem Satz: Die n Zeilen der Matrix A sind genau dann linear unabhängig, wenn für eine zugehörige Matrix in Zeilenstufenform $r = n$ gilt, dh also genau dann, wenn in der Zeilenstufenform keine Nullzeilen auftreten. Dies kann wegen $r \leq m$ höchstens dann sein, wenn $n \leq m$ ist. Das bedeutet, dass $m + 1$ oder mehr Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^m$ immer linear abhängig sind.

Beispiel: Wir untersuchen die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 4)$, $v_2 = (-1, -1, 5, -9)$, $v_3 = (2, 0, -13, 23)$, $v_4 = (1, 5, 1, -2) \in \mathbb{R}^4$ und erhalten nacheinander die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 - 2Z_1 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_1}]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{Z_3 \to Z_3 + 3Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 sind nicht linear unabhängig.

Bemerkung: Man sieht aber auch, dass Zeilenumformungen den linearen Aufspann der Zeilen einer Matrix nicht ändern. Ein Blick auf die dritte Matrix zeigt, dass v_3 eine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_4 ist (es wurden bis dahin nur Umformungen der Art (Z2) vorgenommen, dh es wurden keine Zeilen vertauscht!): es gilt also

$$\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_4).$$

Außerdem sieht man, dass v_1, v_2, v_4 linear unabhängig sind.

Beispiel: Wir wenden nun das Verfahren für eine andere Matrix an

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es wurden hierbei keine Zeilen vertauscht. Die ersten drei Zeilen sind also linear unabhängig, alle vier Zeilen sind linear abhängig. Die vierte liegt somit im linearen Aufspann der ersten drei Zeilen.

Zeilennormalform Eine Matrix, die in Zeilenstufenform ist, kann man durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform (ZNF) bringen. Dabei heißt $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ in Zeilennormalform , wenn sie in Zeilenstufenform ist und zusätzlich gilt:
(iii) für $j = 1, 2, \dots, r$ gilt: $\gamma_j = c_{jk_j} = 1$ und $c_{lk_j} = 0$ für $l = 1, 2, \dots, j-1$ (dh oberhalb von c_{jk_j} stehen auch nur Nullen).

Beispiel mit $n = 5$ und $m = 8$, $r = 4$ (hier * bedeutet, dass es egal ist was das Element ist):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Für die konkrete Matrix im dritten letzten Beispiel formen wir weiter um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{Z_3\to -Z_3}{\overset{Z_2\to\frac{1}{2}Z_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_1\to Z_1-3Z_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{Z_2\to Z_2+\frac{5}{2}Z_3}{\overset{Z_1\to Z_1-\frac{23}{2}Z_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6 Basen und Dimension

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Satz und Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$ heißen Basis von V , falls sie linear unabhängig sind und $\mathrm{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_n\} = V$ gilt. In diesem Fall enthalten je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Zahl heißt die Dimension von V, geschrieben $\dim V$.

Beispiel: Es gilt $\dim \mathbb{K}^n = n$ und eine Basis ist gegeben durch die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Bemerkung 1.2. *Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von Dimension n ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von Dimension $2n$.*

Bemerkung 1.3. *Wir betrachten die Vektoren $e_1, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$, wobei $e_j := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (alle Komponenten sind Null außer der j-ten). Dann ist $e_1, ..., e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ genannt die Standardbasis.*

Definition 1.6. *Ist $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, \dots, b_n$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$. Die $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ heißen Koordinaten von v bzgl. der Basis $b_1, b_2, \dots, b_n$.*

Beweis. (der Eindeutigkeit) Existenz folgt aus $v \in V = \mathrm{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Sind $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j \in \mathbb{K}$ für $j = 1, \dots, n$ mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j = v = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j b_j$, so folgt

$$0 = v - v = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \tilde{\alpha}_j) b_j$$

und weiter $\alpha_j = \tilde{\alpha}_j$ für alle $j = 1, \dots, n$, da $b_1, b_2, \dots, b_n$ linear unabhängig sind. □

Beispiele: (1) Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{v}_1 := (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 := (1, 0, 0)$ und $\vec{v}_3 := (0, 1, 0)$. Dann sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig, aber $\vec{v}_3 \in \mathrm{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ist Basis von $\mathrm{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathrm{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Es ist $\dim \mathrm{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = 2$. Auch $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ bzw. $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind hier Basen von $\mathrm{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

(2) Eine Basis des Unterraums $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ von $\mathbb{R}^3$ ist $\{(1,-1,0),(0,-1,1)\}$. In der Tat man kann leicht überprüfen, dass die Vektoren $(1,-1,0),(0,-1,1)$ linear unabhängig sind (Hausaufgabe). Ferner gilt $(x,y,z) \in A \equiv (x,y,z) = (x,-x-z,z) \equiv (x,y,z) = x(1,-1,0) + y(0,-1,1) \equiv (x,y,z) \in \mathrm{lin}\{(1,-1,0),(0,-1,1)\}$. Deshalb hat A dimension 2, (ist eine Ebene).

1.7 Lineare Gleichungssysteme

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \dots & +a_{nm}x_m & = b_n \end{array}$$

mit gegebenen $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$ und gesuchten $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder als $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben und $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ gesucht ist. Hierbei verwenden wir das Matrix-Vektor-Produkt :
Für $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x} = (x_k)_{k=1}^m \in \mathbb{K}^m$ ist $A\vec{x} = \Big(\sum_{k=1}^m a_{jk}x_k\Big)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$.
Beachte: Wir schreiben Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, die wir bisher als m-Tupel geschrieben haben, ab jetzt ggf. als **Spaltenvektoren**! Dies ist die übliche Konvention.

Beispiel: Sei $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Für den l-ten Einheitsvektor $\vec{e}_l = (\delta_{lk})_{k=1}^m \in \mathbb{K}^m$ erhalten wir

$$A\vec{e}_l = \Big(\sum_{k=1}^m a_{jk}\delta_{kl}\Big)_{j=1}^n = (a_{jl})_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n,$$

dh $A\vec{e}_l$ **ist die l-te Spalte der Matrix** A. Für $n = m = 3$ und $l = 2$ ist etwa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}.$$

1.8 Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \qquad (A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}, \qquad A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x},$$

wobei für $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ die Matrizen $A+B, \alpha A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gegeben sind durch

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m},$$

dh an jeder Stelle (j,k) werden die Einträge addiert bzw. mit α multipliziert.

1.9 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Wir setzen

$$\operatorname{Kern} A := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^m \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} A := \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n.$$

Kern A ist die Lösungsmenge der <u>homogenen Gleichung</u> $A\vec{x} = \vec{0}$. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt <u>inhomogen</u> und $\vec{b}$ heißt <u>Inhomogenität</u> der Gleichung. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung, dann und nur dann wenn $\vec{b} \in \operatorname{Bild} A$.

Beispiele: (1) $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Dann hat $A\vec{x} = \vec{b}$ keine Lösung. Also ist $\vec{b}$ nicht im Bild(A). Es gilt $A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Also Kern $(A) = \operatorname{lin}\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\}$.

Satz 1.2. *(1) Kern A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^m$ und Bild A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.*

(2) Bild A ist der lineare Aufspann der Spalten von A.

(3) Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A\vec{x} = \vec{b} = A\vec{y}$, so ist $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Kern} A$. Ist $\vec{z} \in \operatorname{Kern} A$, so ist $A(\vec{x} + \vec{z}) = \vec{b}$. Insbesondere ist die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung, wenn sie nicht-leer ist, ein affiner Teilraum *von $\mathbb{K}^m$. (Also hat das System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen).*

Beweis. (1) Folgt aus den Eigenschaften des Matrix-Vektor Produkts. Zum Beispiel sind $\vec{x}, \vec{y}, \in$ Kern A dann $A\vec{x} = \vec{0}, A\vec{y} = \vec{0}$ also $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0}$. Ähnlich kann man zeigen: ist $\vec{x} \in$ Kern A und $c \in K$ dann $c\vec{x} \in$ Kern A. Also ist Kern A ein Unterraum von A.

(2) Für jeden Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ gilt

$$\vec{x} = \sum_{l=1}^{m} x_l \vec{e}_l, \quad \text{also} \quad A\vec{x} = A\Big(\sum_{l=1}^{m} x_l \vec{e}_l\Big) = \sum_{l=1}^{m} x_l \Big(\underbrace{A\vec{e}_l}_{l\text{-te Spalte von } A}\Big)$$

(3) Da die Lösungsmenge nach Annahme nicht leer ist, gibt es ein $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^m$ mit $A\vec{x}_0 = \vec{b}$. Jetzt für jedes $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ gilt:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A\vec{x} = A\vec{x}_0 \Leftrightarrow A(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{x}_0) \in \mathrm{Kern}(A) \Leftrightarrow \vec{x} \in (\vec{x}_0 + \mathrm{Kern}(A))$$

Also ist die Lösungsmenge gleich wie der affine Teilraum $\vec{x}_0 + \mathrm{Kern}(A)$. $\square$

Beispiele (2) Sei A wie im letzten Beispiel und $\vec{b} = \binom{1}{0}$. Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar und die Menge aller Lösungen ist der affine Teilraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\mathrm{lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \mathrm{Kern}\ A} .$$

(3) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{b} = \binom{0}{1}$. Dann ist $\vec{x} := \binom{-1/2}{1}$ die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Bemerkung 1.4. *Zeilenumformungen ändern den Kern einer Matrix nicht. Das liegt daran, dass Zeilenumformungen Equivalent sind zu Addition, Tausch usw von homogenen Gleichungen.*

Folgerung: (1) Wir erhalten die Gesamtheit der Lösungen der inhomogenen Gleichung (falls es überhaupt welche gibt), indem wir zu einer **speziellen** Lösung der inhomogenen Gleichung alle Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung addieren.

(2) Es gilt

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ ist lösbar } \iff \vec{b} \in \mathrm{Bild}\, A \iff \vec{b} \text{ ist LK der Spalten von } A.$$

Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, so ist die Lösung eindeutig genau dann, wenn $\mathrm{Kern}\, A = \{\vec{0}\}$ gilt.

1.10 Lösungsalgorithmus, Dimensionsformel

Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Zur Lösung erweitern wir die Matrix A um $\vec{b}$ als $(m+1)$-te Spalte, betrachten also $(A \,|\, \vec{b}) \in \mathbb{K}^{n \times (m+1)}$. Für $A = (a_{jk})$ und $\vec{b} = (b_j)$ ist

$$(A \,|\, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

Wir werden Zeilenumformungen verwenden. Die Zeilenumformungen ändern nicht die Lösungsmenge des Systems.

Algorithmus (Eliminationsverfahren nach Gauß):
(1) Matrix A um $\vec{b}$ als letzte Spalte erweitern.

(2) Die erweiterte Matrix $(A \,|\, \vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF (oder ZSF) bringen.
(3) Lösbarkeit und Lösung ablesen.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösbarkeit: Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist **nicht lösbar** genau dann, wenn eine ZSF von $(A \,|\, \vec{b})$ die Form $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$ hat und es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $c_{jk} = 0$ für $k = 1, \ldots, m$ und $c_{j,m+1} \neq 0$.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösung: Für alle Spalten mit der Eigenschaft, dass kein Element von ihnen das erste nicht Null Element seiner Zeile ist, setzen wir den zugohörigen unbekannten als freien Parameter. Dann lösen wir auf bezüglich der anderen unbekannten.

Wir zeigen am Beispiel, wie man im Falle der Lösbarkeit die Lösungen ablesen kann. Dazu nehmen wir an, dass die berechnete Zeilennormalform von $(A \,|\, \vec{b})$ die folgende Gestalt hat (hier ist $n = 4$, $m = 5$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Man nehme die Variablen zu den Spalten, die “hinter” den Stufen stehen (im Beispiel die dritte und die fünfte Spalte), als *freie Parameter* (im Beispiel also etwa $s = x_3$ und $t = x_5$). Schreibt man die Gleichungen wieder aus, so erhält man

$$x_1 = c_1 - s\alpha_1 - t\beta_1, \quad x_2 = c_2 - s\alpha_2 - t\beta_2, \quad x_4 = c_3 - t\beta_3.$$

Also ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ 0 \\ -\beta_3 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Hier gilt $\operatorname{Kern} A = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ 0 \\ -\beta_3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ und $\dim(\operatorname{Kern} A) = 2$. Die Lösungsmenge ist eine Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Um den Kern einer Matrix A zu bestimmen lösen wir die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ mit dem Lösungsalgorithmus von Gauß. Um das Bild einer Matrix zu bestimmen

(1) Wir schreiben das zugehörige System wo die rechte Seite Parameter sind.
(2) Mit dem Algorithmus von Gauß bestimmen wir Bedingungen für die Lösbarkeit.
Den Kern kann man alternativ mit dem -1 Ergänzung Trick bestimmen und zwar
(1) Man bringt die Matrix A in Zeilennormalform.
(2) Man streicht die Zeilen die Null sind (wenn es solche Zeilen gibt)
(3) Man ergänzt die Matrix mit Zeilen deren Elemente Null sind, bis auf ein Element das -1 ist. Die Ergänzung wird so gemacht, damit die diagonalen Elemente der Matrix nur 1 und -1 sind.
(4) Der Kern ist der lineare Aufspann der Spalten der ergänzten -1.

Ausgehend von der Zeilennormalform lasse man zunächst die Nullzeilen weg. Dann ergänze man unter den Zeilen mit "längeren" Stufen eine Zeile mit -1 und sonst Nullen (ggf. mehrere solcher Zeilen s.u.) so, dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht. Im Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Dann nimmt man für jede (-1)-Spalte einen freien Parameter und kann die Lösungsmenge hinschreiben: letzte Spalte plus jeweils freier Parameter mal entsprechender Spalte, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ \beta_3 \\ -1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Man vergleiche dies mit der Darstellung oben.

Weiteres Beispiel zum (-1)-Ergänzungstrick:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösungsmenge ist hier also gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Dimensionsformel Für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ gilt $\dim \operatorname{Kern} A + \dim \operatorname{Bild} A = n$.
Rang Wir definieren den Rang einer Matrix durch $\operatorname{Rang} A = \dim \operatorname{Bild} A$.
Satz Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\iff \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A|\vec{b})$.

Beispiele: (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hier ist $n = m = 3$ und $\operatorname{Rang} A = 3$, da die Zeilen (oder auch die Spalten) linear unabhängig sind. Somit ist $\dim(\operatorname{Kern} A) = 3 - 3 = 0$ und $\operatorname{Kern} A = \{\vec{0}\}$. Ablesen lässt sich das natürlich auch an einer ZSF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hier ist $n = m = 3$ und $\operatorname{Rang} A = 2$, da die ersten beiden Spalten linear unabhängig sind, die dritte Spalte jedoch Summe der ersten beiden. Somit ist $\dim(\operatorname{Kern} A) = 3 - 2 = 1$. Durch Probieren findet man $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} A$. Folglich ist $\operatorname{Kern} A = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Zum selben Ergebnis kommt man mit einer ZNF und anschließender (-1)-Ergänzung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.11 Lineare Abbildungen

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Definition 1.7. *Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt linear , (bzw. genauer $\mathbb{K}$-linear), falls für alle $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), \quad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x).$$

Für ein solches ϕ heißt

$$\mathit{Kern}\,\phi := \{x \in V : \phi(x) = 0\}$$

der Kern von ϕ und

$$\mathit{Bild}\,\phi := \{\phi(x) : x \in V\}$$

heißt Bild von ϕ.

Satz 1.3. *Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann gilt:*
(1) Kern ϕ [bzw. Bild ϕ] ist ein Unterraum von V [bzw. W].
(2) ϕ ist injektiv $\Longleftrightarrow$ Kern $\phi = \{0\}$.

1.12 Das Produkt von Matrizen

Wie immer schreiben wir wieder $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Seien $n, m, q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times q}$ Matrizen mit $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ und $B = (b_{kl})_{k=1}^{m}{}_{l=1}^{q}$. Das Matrixprodukt $AB \in \mathbb{K}^{n\times q}$, ist die Matrix $C = (c_{jl})_{j=1}^{n}{}_{l=1}^{q}$ mit

$$c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kl}, \qquad j = 1, \dots, n,\ l = 1, \dots, q.$$

Man beachte, dass hierbei die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist (nämlich m), andernfalls ist das Matrixprodukt **nicht definiert**.

Bemerkung 1.5. *Man erhält die l-te Spalte von AB, indem man die Matrix A mit der l-ten Spalte von B multipliziert (im Sinne des Matrix-Vektor-Produktes).*

Beispiel mit $n = m = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften des Produktes von Matrizen: Für alle $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{m\times q}$, $C \in \mathbb{K}^{q\times r}$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(A_1 + \alpha A_2)B_1 = A_1B_1 + \alpha A_2B_1, \quad A_1(B_1 + \alpha B_2) = A_1B_1 + \alpha A_1B_2, \quad (A_1B_1)C = A_1(B_1C).$$

Warnung: Im allgemeinen gilt $AB \neq BA$! Damit beide Produkte existieren, muss zunächst $n = q$ sein. Dann ist AB eine $n \times n$-Matrix und BA eine $m \times m$-Matrix. Gleichheit kann also höchstens für $n = m = q$ gelten. Für $n = m = q = 2$ ist aber z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.13 Invertierbare Matrizen

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $I_n := (\delta_{jk})_{j,k=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix (wir schreiben auch kurz I, wenn n aus dem Zusammenhang klar ist).

Es gilt dann $IA = AI = A \quad$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Definition 1.8. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt regulär, falls $\operatorname{Rang} A = n$ ist, und invertierbar, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $AB = BA = I$. In diesem Fall ist B eindeutig und heißt Inverse von A (oder zu A inverse Matrix). Sie wird mit A^{-1} bezeichnet.*

Beweis der Eindeutigkeit. Ist A invertierbar, so ist die Matrix B in obiger Definition eindeutig bestimmt, denn für eine weitere Matrix $\tilde{B}$ mit diesen Eigenschaften folgt:

$$B = BI = B(A\tilde{B}) = (BA)\tilde{B} = I\tilde{B} = \tilde{B}. \tag{*}$$

Diese Matrix B heißt *Inverse von A* (oder *zu A inverse Matrix*) und wird mit A^{-1} bezeichnet. □

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar. Dann sind A^{-1} und AB invertierbar, und es gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad \text{und} \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Beweis. Gilt $AB = I$, so ist $\operatorname{Kern} B = \{\vec{0}\}$ und $\operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n$, und nach dem Satz sind A, B invertierbar. Für $A^{-1} = B$ verwenden wir ein Argument wie in (*). □

Satz 1.4. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

$$A \text{ regulär} \iff \operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n \iff \operatorname{Kern} A = \{\vec{0}\} \iff A \text{ invertierbar}.$$

Bemerkung 1.6. *Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = I$, so sind A und B invertierbar und es gilt $A^{-1} = B$.*

Beweis. Gilt $AB = I$, so ist $\operatorname{Kern} B = \{\vec{0}\}$ und $\operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n$, und nach dem Satz sind A, B invertierbar. Für $A^{-1} = B$ verwenden wir ein Argument wie in (*). □

Berechnung von A^{-1}: Man bringt die Matrix $(A|I)$ auf Zeilennormalform und bekommt $(I|A^{-1})$.

Beispiel: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ invertierbar und $a \neq 0$. Wir setzen $\delta := ad - bc$ und sehen an der dritten Matrix, dass $\delta \neq 0$ ist.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - bc/a & -c/a & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & \delta/a & -c/a & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -c/\delta & a/\delta \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} + \frac{bc}{\delta a} & -b/\delta \\ 0 & 1 & -c/\delta & a/\delta \end{array}\right).$$

Wegen $\frac{1}{a} + \frac{bc}{\delta a} = d/\delta$ ist also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Den Fall $c \neq 0$ behandelt man analog, er führt auf dieselbe Formel. Wir sehen auch, dass Invertierbarkeit äquivalent ist zu $\delta \neq 0$.

1.14 Ergänzung: Lineare Abbildungen als Matrizen

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume von Dimension m bzw. n und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. In V und W seien geordnete[1] Basen $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_m})$ bzw. $C = (\vec{c_1}, \vec{c_2}, \ldots, \vec{c_n})$ gegeben. Dann gibt es genau eine Matrix bezeichnet durch ${}_C[\phi]_B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit der Eigenschaft

$$\phi\Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{b_k}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{c_j} \iff {}_C[\phi]_B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

${}_C[\phi]_B$ heißt dann Matrix zu ϕ bzgl. der Basen B und C .

Satz 1.5. *Seien U, V, Z $\mathbb{K}$-Vektorräume und B (bzw. C, bzw. D) eine Basis in U (bzw. V, bzw. C). Seien $\phi : U \to V$, $\psi : V \to Z$ lineare Abbildungen. Dann*

$${}_D[\psi \circ \phi]_B = {}_D[\psi]_C \; {}_C[\phi]_B.$$

2 Skalarprodukt und Orthogonalität

2.1 Skalarprodukte

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(S1) $\forall x, y \in V$: $(x|y) = \overline{(y|x)}$,

(S2) $\forall x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$,

(S3) $\forall x \in V \setminus \{0\}$: $(x|x) > 0$.

heißt ein Skalarprodukt auf V. (Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und also V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so kann auf die komplexe Konjugation verzichtet werden, da $\overline{r} = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$.)

2.2 Eigenschaften

Eigenschaften eines Skalarproduktes auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V sind

$$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}\text{: } (x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z),\ (x|0) = (0|x) = 0,$$
$$\forall x, y \in V : |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} \text{ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).}$$

[1] das bedeutet, dass die Reihenfolge der Elemente der Basis wichtig ist

Beispiele: (1) Das gewöhnliche Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}^n$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt es auch euklidisch) ist gegeben durch

$$(\vec{x}|\vec{y}) := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} \quad \text{für } \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Für das Skalarprodukt von $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ schreibt man häufig auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ (und gelegentlich sogar nur $\vec{x}\vec{y}$).

(2) Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, so definiert auch

$$(\vec{x}|\vec{y}) := \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \overline{y_j} \quad \text{für } \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$.

(3) Ist $V = C([a,b], \mathbb{C})$ (hier ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), so wird durch

$$(f|g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt, \quad f, g \in C[a,b],$$

ein Skalarprodukt auf $C([a,b], \mathbb{C})$ definiert. Die Eigenschaften (S1) und (S2) sind leicht. Zum Nachweis von (S3) stellt man fest, dass für $h \in C[a,b]$ mit $h \geq 0$ und $\int_a^b h(t)\, dt = 0$ zunächst folgt $\int_a^x h(t)\, dt$ für alle $x \in [a,b]$, und dann $h = 0$ nach dem Hauptsatz. Diese Beobachtung wendet man auf $h := |f|^2$ an.

2.3 Normen

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt, so hat die Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$, $v \mapsto \sqrt{(v|v)}$ folgende Eigenschaften:

(N1) $\forall v \in V$: $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$,

(N2) $\forall v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,

(N3) $\forall u, v \in V$: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis der Dreiecksungleichung. Es gilt (unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

$$\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u|v)| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2,$$

und die Ungleichung folgt durch Wurzelziehen. □

Definition 2.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften (N1)–(N3) heißt eine Norm auf V.*

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so wird für $u, v \in V$ die Zahl $\|u - v\| \geq 0$ als **Abstand** von u und v interpretiert, und es gilt $\|0\| = 0$, sowie

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \quad \text{(umgekehrte Dreiecksungleichung).}$$

Beweis der Dreiecksungleichung. Es gilt (unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

$$\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u|v)| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2,$$

und die Ungleichung folgt durch Wurzelziehen. □

2.4 Orthogonalität

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ heißen orthogonal, falls für alle $j, k \in \{1, 2 \ldots, m\}$ mit $j \neq k$ gilt $(v_j|v_k) = 0$. Statt $(v|w) = 0$ schreibt man auch $v \perp w$.

Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m$ heißen orthonormal , oder ein Orthonormalsystem (ONS), falls für alle j, k gilt: $(v_j|v_k) = \delta_{jk}$, dh also falls die Vektoren orthogonal sind und zusätzlich alle Norm 1 haben.

Ist V endlich-dimensional, so ist eine Orthonormalbasis (ONB) von V eine Basis von V, die ein Orthonormalsystem ist.

Beispiel: Die Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$, denn es gilt $(\vec{e}_j|\vec{e}_k) = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 1, \ldots, n$.

Satz 2.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ orthogonal. Dann sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Ist $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ein Orthonormalsystem in V und $v \in lin\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, dann gilt*

$$v = \sum_{j=1}^{m} (v|v_j) v_j.$$

Beweis. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Sei nun $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir nehmen das Skalarprodukt der Gleichung mit v_k und erhalten

$$0 = (0|v_k) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n | v_k) = \alpha_k (v_k|v_k)$$

wegen der vorausgesetzten Orthogonalität. Wegen $v_k \neq 0$ ist auch $(v_k|v_k) \neq 0$, und wir erhalten $\alpha_k = 0$. Da k beliebig war, sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig. □

2.5 Orthogonalprojektionen und Gram-Schmid Verfahren

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ein Orthonormalsystem in V und $U := \text{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Die lineare Abbildung

$$P : V \to U, v \mapsto Pv = \sum_{j=1}^{m} (v|b_j) b_j$$

hat die Eigenschaften: $P \circ P = P$, $\text{Bild}\, P = U$, $\text{Kern}\, P = \{v \in V : v \perp u \text{ für alle } u \in U\}$.

Es gilt $(v - Pv|u) = 0$ für alle $u \in U$, $v \in V$, und

$$\|v - Pv\| = \min\{\|v - u\| : u \in U\} \quad \text{für jedes } v \in V,$$

dh Pv ist die (eindeutig bestimmte) Bestapproximation von v in U. Die Abbildung P heißt Orthogonalprojektion von V auf U.

Gram-Schmidt Verfahren

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt und $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ seien linear unabhängig.

Wir setzen $b_1 := v_1/\|v_1\|$ und für $k = 2, \ldots, m$:

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} (v_k|b_j) b_j, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|},$$

Dann $\text{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \text{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ist ein Orthonormales System.

Beispiele: (1) Wir betrachten $n = 3$, $V = \mathbb{C}^3$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\vec{c}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{b}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{c}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
\vec{b}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ wie eben, aber $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ wie eben, aber

$$
\begin{aligned}
\vec{c}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \\
\vec{b}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass sich dieses $\vec{b}_3$ von dem in Beispiel (1) nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Dies ist nicht erstaunlich, da es genau zwei Möglichkeiten gibt, $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ zu einer Orthonormalbasis zu ergänzen.

Folgerung 2.1. *Jeder endlichdimensionale Vektorraum V mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis.*

2.6 Transponierte und adjungierte Matrizen

Für eine Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{K}^{n \times m}$, die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die transponierte Matrix zu A und wird mit A^T bezeichnet. Für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ steht an der Stelle (k, j) in der Matrix A^T also der Eintrag a_{jk}, der in der Matrix A an der Stelle (j,k) steht. Setzen wir $B := A^T$ mit $B = (b_{kj})_{k=1}^{n}{}_{j=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$, so gilt also

$$b_{kj} = a_{jk}, \quad k \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}.$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{C}^{n\times m}$, für die an jeder Stelle (k,j) der Eintrag $\overline{a_{jk}}$ steht, die adjungierte Matrix zu A und wird mit A^* bezeichnet.

Bemerkung 2.1. *Setzt man $\overline{A} := (\overline{a_{jk}}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (konjugiert komplexe Matrix zu A), so gilt also*

$$A^* = \overline{A^T} = \left(\overline{A}\right)^T.$$

Beispiele 1) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dann $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$ dann $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 5 & 1+i \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 5 & 1-i \end{pmatrix}$.

Schreibweisen des Standardskalarprodukts: Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^T\vec{x} = \vec{x}^T\vec{y}$.
Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n\times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^*\vec{x} = \overline{\vec{x}^*\vec{y}}$.

Rechenregeln: Für Matrizen A, B, deren Produkt erklärt ist, gilt:

$$(AB)^T = B^TA^T \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Für eine invertierbare Matrix A sind auch A^T und A^* invertierbar, und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \qquad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Folgerung 2.2. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann gilt:*

(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^T\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^*\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$.

2.7 Orthogonale und unitäre Matrizen

Eine wichtige Rolle spielen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, deren zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, das Skalarprodukt invariant lässt, dh für die gilt:

$$(A\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n.$$

Damit verändert A auch Winkel und Abstände nicht. Eine solche Matrix A hat Kern $A = \{\vec{0}\}$, ist also invertierbar. Aus den Rechenregeln folgt

$$A^TA = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}), \qquad A^*A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit dieser Eigenschaft heißt orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Somit gilt

$$A^T = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ orthogonal}, A^* = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ unitär.}$$

Bemerkung 2.2. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

1) A ist genau dann unitär, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bilden.

2) A ist genau dann unitär, wenn für jedes Orthonormalsystem $v_1, \dots, v_m$ in $\mathbb{C}^n$ auch $Av_1, \dots, Av_m$ ein Orthonormalsystem von $\mathbb{C}^n$ ist.

3) Produkte, Inverse, Transponierte und Adjungierte von unitären Matrizen sind unitär.

1) A ist genau dann orthogonal [bzw. unitär], wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ [bzw. $\mathbb{C}^n$] bilden.

Beispiele: 1) Spiegelungen in $\mathbb{C}^n$: etwa $A\vec{e}_1 = -\vec{e}_1$, $A\vec{e}_j = \vec{e}_j$ für $j = 2, \dots, n$.

2) Rotation in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\theta \in \mathbb{R}$: $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

3) Im $\mathbb{R}^3$ Rotation um die z-Achse bei Spiegelung an der (x, y)-Ebene:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Erweiterung) Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ [bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$].

3 Determinanten und Kreuzprodukt

3.1 Definierende Eigenschaften der Determinante

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(D1) $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1$,
(D2) für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_j \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_1, \dots, \alpha\vec{a}_j + \beta\vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n) \\ = \; & \alpha\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \beta\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n), \end{aligned}$$

(D3) Wenn wir zwei Spalten vertauschen, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Bemerkung: Durch die Eigenschaften (D1)–(D3) ist die Determinante $\det$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Man kann auch die definierenden Eigenschaften mit Hilfe der Zeilen anstatt der Spalten definieren.

(D1) bedeutet eine (naheliegende) Normierung. (D2) bedeutet, dass die Determinante in jeder Spalte linear ist.

Schreibweise: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$, so schreibt man auch

$$|A| := \det(A) := \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Wir betrachten im folgenden $\det$ meist als Funktion auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

3.2 Folgerungen

(a) Ist eine Spalte $= 0$, so ist auch die Determinante $= 0$.

(b) Man kann zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

(c) Hat die Matrix zwei gleiche Spalten, dann hat sie Determinante Null.

(d) Sind die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ linear abhängig (dh gilt $\operatorname{Rang} A < n$), so ist $\det(A) = 0$.

(e) Es gilt: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.

Alle obige Folgerungen gelten wenn Spalten durch Zeilen ersetzt werden.

Erinnerung: Eine Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt regulär, falls sie invertierbar ist, bzw. falls die zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \mapsto Ax$ bijektiv (oder injektiv oder surjektiv) ist (vgl. 14.21 in HM I).
Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder die Maximalzahl linear unabhängigier Zeilen).

Beweis. (a) folgt sofort aus (D2). (b) folgt leicht aus (D2) und (D3).

zu (c): Wegen (b) und (D2) ist

$$\begin{aligned}
& \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{a}_j}_{k}, \ldots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) \\
= \; & \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \ldots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) \\
= \; & \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \ldots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) \\
= \; & \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{a}_k}_{k}, \ldots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) \\
= \; & -\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).
\end{aligned}$$

zu (d): Es sei etwa die letzte Spalte Linearkombination der anderen Spalten. Wegen (D2) und (D3) gilt dann:

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{a}_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_j) = 0.$$

Wegen (d) muss man bei (e) nur noch zeigen: $\operatorname{Rang} A = n$ impliziert $\det(A) \neq 0$. Dazu bringen wir A durch elementare Spaltenumformungen (analog zu Zeilenumformungen, nur für Spalten statt für Zeilen) auf die Gestalt der Einheitsmatrix I_n. Dabei wird nach (D2) (für $\vec{b}_j = 0$) und (b) und (c) $\det(A)$ nur mit Zahlen $\neq 0$ multipliziert. Wegen (D1) ist schließlich $\det(I_n) = 1 \neq 0$. □

3.2.1 Der Fall $n = 2$

Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

denn die Eigenschaften (D1) und (D3) sind klar, und (D2) ist leicht.

Beispiele: (1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-3)(-4) = 0$, die Matrix ist nicht regulär.

(2) $\begin{vmatrix} i & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = i \cdot (-1) - (-4) \cdot 0 = -i$, die Matrix ist regulär.

3.2.2 Der Fall $n = 3$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = avz + bwx + cuy - awy - buz - cvx.$$

(D1) ist klar, (D2) ist leicht. (D3) braucht eine Fallunterscheidung, die wir unten im allgemeinen Fall durchführen.

Die Regel von Sarrus gilt für $n = 3$, **aber nicht für** $n \geq 4$**!**

Schema:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & a & b & c & & & \\ & & w & u & v & w & u & & \\ & y & z & x & y & z & x & y & \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & & \searrow & \searrow & \searrow \\ - & - & - & & & & + & + & + \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 \cdot 5 - 0 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 5 = 6.$$

3.2.3 Der allgemeine Fall

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit den Einträgen a_{jk}. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $A_{1k} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der ersten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

Man hat die folgende Formel, die das Berechnen von $\det(A)$ auf das Berechnen der Determinanten kleinerer Matrizen zurückführt:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}).$$

Für $n = 3$ steht hier gerade die Formel aus 3.2.2, für $n = 2$ diejenige aus 3.2.1.

Beweis. (D1) ist klar, und (D2) ist nicht so schwer. Zum Beweis von (D3) seien zwei Spalten von A gleich, etwa die k_0-te und die k_1-te, wobei $k_0 < k_1$. In der Summe verschwindet dann $\det(A_{1k})$ für alle $k \notin \{k_0, k_1\}$, da in diesen A_{1k} zwei Spalten gleich sind (weder die k_0-te noch die k_1-te sind gestrichen worden). Also ist

$$\det(A) = (-1)^{k_0+1} a_{1k_0} \det(A_{1k_0}) + (-1)^{k_1+1} a_{1k_1} \det(A_{1k_1}).$$

Hierbei ist $a_{1k_0} = a_{1k_1}$ nach Voraussetzung. Wir erhalten A_{1k_1} aus A_{1k_0}, indem wir durch sukzessives Vertauschen benachbarter Spalten die $k_1 - 1$-te Spalte (von A_{1k_0}) an die k_0-te Stelle bringen. Dazu brauchen wir $k_1 - 1 - k_0 = k_1 - k_0 - 1$ Vertauschungen. Also ist

$$\det(A_{1k_1}) = (-1)^{k_1-k_0-1}\det(A_{1k_0}).$$

$\square$

Beispiel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ von der Form $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & * & d_n \end{pmatrix}$, also eine untere Dreiecksmatrix, so gilt $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$.

3.3 Determinantenentwicklungssatz

Die Formel in 3.2.3 nennt man Entwicklung von $\det(A)$ nach der ersten Zeile von $A = (a_{jk})_{jk}$. Mit denselben Argumenten kann man $\det(A)$ nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

Für jedes $l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+l}a_{lk}\det(A_{lk}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+l}a_{jl}\det(A_{jl}),$$

wobei $A_{jk} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix bezeichne, die aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

Beispiel: Man entwickelt möglichst nach einer Zeile oder Spalte mit vielen Nullen, hier z.B. nach der zweiten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 7 - 3 \cdot 6) = -8.$$

3.4 Determinantenmultiplikationssatz

Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

(ohne Beweis).

Insbesondere gilt für eine reguläre Matrix A: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Interpretation: Die Matrix B habe die Spalten $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$. Der von diesen Spalten aufgespannte Spat hat das Volumen $\det(B)$. Dieser Spat wird von der zur Matrix A gehörenden linearen Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ auf den von den Spalten $A\vec{b}_1, \ldots, A\vec{b}_n$ der Matrix AB aufgespannten Spat mit Volumen $\det(AB)$ abgebildet.
Bildet man also mit der zur Matrix A gehörenden Abbildung einen beliebigen Spat ab, **so muss man dessen Volumen mit** $\det(A)$ **multiplizieren**.

3.5 Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ sei und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$ habe. Wenn die Matrix A regulär ist, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, wobei für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$x_j = \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{b}}_{j}, \ldots, \vec{a}_n)/\det(A).$$

Zur Berechnung der j-ten Komponente x_j der Lösung muss man also die j-te Spalte von A durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzen, die Determinante berechnen und durch die Determinante von A dividieren.

Beweis. Wir haben $\vec{b} = \sum_{l=1}^n x_l \vec{a}_l$, also ist wegen (D2):

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{b}}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{l=1}^{n} x_l \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{a}_l}_{j}, \ldots, \vec{a}_n).$$

Wegen (D3) bleibt rechts nur der Summand für $l = j$ stehen, dh $x_j \det(A)$. □

3.6 Eine Formel für die inverse Matrix

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär mit Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$. Geht man zur Berechnung von A^{-1} vor und verwendet die Cramersche Regel 3.5, so erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \Big(\det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{e}_k}_{j}, \ldots, \vec{a}_n)\Big)_{j,k=1}^{n}.$$

Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar. Dann $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Sei $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_22 \end{pmatrix}$ die Inverse von A. Dann $k_{11} = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \frac{d}{det(A)}$

$k_{21} = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \frac{-b}{det(A)}$, $\quad k_{12} = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \frac{-c}{det(A)}$,

$k_{22} = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \frac{a}{det(A)}$. Deshalb bekommen wir die bekannte Formel

$$K = \frac{1}{ad - bc} \det \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3.7 Orientierung

Die Idee in 3.1 war, dass $\det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ das Volumen des von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Spates beschreibt. Wegen (D2) (und (D1)) nimmt det auch negative Werte an. Das eigentliche Volumen ist $|\det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)|$. Aber auch das Vorzeichen von $\det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ trägt Information.

Zwischenspiel: Ist V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so kann man φ eine Determinante $\det \varphi$ zuordnen, indem man eine Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ von V wählt, die Abbildung φ bzgl. dieser Basis durch eine Matrix A darstellt und $\det \varphi := \det(A)$ setzt.

Ist nämlich $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ eine weitere Basis von V, so erhalten wir die Darstellungsmatrix $\widetilde{A}$ von φ bzgl. dieser Basis als $\widetilde{A} = S^{-1}AS$, wobei S die Darstellungsmatrix der Identität $V \to V$ ist, wenn man "vorne" die Basis $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ und "hinten" die Basis $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ nimmt. Wegen 3.4 ist dann

$$\det(\widetilde{A}) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A) = \det \varphi,$$

dh die Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Definition: Eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt <u>orientierungstreu</u>, falls $\det \varphi > 0$ ist.

Eine geordnete Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von $\mathbb{R}^3$ heißt <u>Rechtssystem</u>, falls $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) > 0$ ist. Meist ist dabei $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ eine Orthonormalbasis.

Satz: Ist $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ein Rechtssystem in $\mathbb{R}^3$ und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ orientierungstreu, so ist auch $\varphi(\vec{b}_1), \varphi(\vec{b}_2), \varphi(\vec{b}_3)$ ein Rechtssystem.

Beispiel: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ist ein Rechtssystem, $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2$ ist kein Rechtssystem.

3.8 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) im $\mathbb{R}^3$

Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ derjenige Vektor, der senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist und für den $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) \geq 0$ ist.

Hieraus ergeben sich folgende **Rechenregeln**:

(0) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

(1) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

(2) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{w} \times \vec{y})$ und $\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{x} \times \vec{z})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{w}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, dh das Kreuzprodukt ist linear in jeder Komponente.

(3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times (\vec{y} + \alpha\vec{x}) = (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \times \vec{y},$$

dh man kann zu einer Variablen ein Vielfaches der anderen dazuaddieren.

(4) Es gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig sind.

Anwendung Lorentzkraft: Eine in einem Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte elektrische Ladung q erfährt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

und wird dadurch abgelenkt (zB $\rightarrow$ Elektromotor). Das durch $\vec{v}$ und $\vec{B}$ aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt $\|\vec{v}\|\|\vec{B}\||\sin\varphi|$, wobei φ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ ist. Die größte Kraft wirkt somit, wenn $\vec{v}$ und $\vec{B}$ senkrecht sind. Sind hingegen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ parallel, so ist $\vec{F} = \vec{0}$ und es wirkt keine Kraft.

Berechnung: Man berechnet $\vec{x} \times \vec{y}$ formal über eine Determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Begründung: Bezeichnet man die rechte Seite mit $\vec{z}$, so sieht man leicht $(\vec{z}|\vec{x}) = \det(\vec{x}, \vec{x}, \vec{y}) = 0$ und $(\vec{z}|\vec{y}) = \det(\vec{y}, \vec{x}, \vec{y}) = 0$ ein. Außerdem ist

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \|\vec{z}\|^2 \geq 0.$$

Der Flächeninhalt a des von $\vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist gegeben durch $a = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\||\sin\varphi|$, wobei φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel ist. Wegen $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\varphi$ erhalten wir

$$a^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2\Big(1 - \cos^2\varphi\Big) = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}|\vec{y})^2.$$

Nun rechnet man nach, dass

$$\|\vec{z}\|^2 + (\vec{x}|\vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

gilt (zur Übung empfohlen).

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}.$$

Warnung: Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ! So ist zB

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{0} = \vec{0}.$$

3.9 Das Spatprodukt

Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ heißt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y}|\vec{z})$ das Spatprodukt von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Satz: Es gilt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Beweis. Man weist für die linke Seite die Eigenschaften (D1)–(D2) der Determinante nach, und dazu die Folgerung (c). Es reicht zu beobachten dass (D2) und (c) implizieren (D3). $\square$

Beispiel: $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ (vgl. die Begründung oben). Anschaulich ist das auch klar, da $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ das Volumen des aufgespannten Spates ist, welches man wegen der Orthogonalität von $\vec{x} \times \vec{y}$ auf dem durch $\vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Parallelogramm als Produkt von $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ mit der Parallelogrammfläche erhält.

Sind $\vec{x}, \vec{y}$ linear unabhängig, so ist $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und zwar ein Rechtssystem.

Eine Basis $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ von $\mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Rechtssystem, wenn $\vec{z}$ auf derselben Seite der durch $\vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Ebene liegt wie $\vec{x} \times \vec{y}$.

Index