Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Teil: Lineare Algebra

Wintersemester 2018/19

Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

Dies ist eine kurze Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Beispiele, Erläuterungen und veranschaulichen- den Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

Contents

1 Grundzüge der linearen Algebra

In diesem Kapitel schreiben wir $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Alle Aussagen Definitionen unten sind anwendbar wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1.

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{K} \textit{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Wir definieren

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

durch komponentenweise *Addition bzw. komponentenweise Multiplikation mit α, dh durch*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Der Punkt $\cdot$ für die Multiplikation mit Skalaren wird gewöhnlich weggelassen.

1.1 Vektorraumaxiome

Setzen wir $V = \mathbb{K}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, so haben $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ die folgenden Eigenschaften:

$(V1)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$ (Assoziativität),
$(V2)$ $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$ (Kommutativität),
$(V3)$ es gibt eine $0 \in V$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in V$ (Existenz der Null),
$(V4)$ für jedes $x \in V$ gibt es ein $-x \in V$ mit $x + (-x) = 0$ (Existenz des Negativen),
$(V5)$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$ (Assoziativität der Multiplikationen),
$(V6)$ $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ und $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$ (Distributivität),
$(V7)$ $1x = x$ für alle $x \in V$ (Kompatibilität).

Definition 1.2. *Ist $V \neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, für welche die Eigenschaften $(V1)$–$(V7)$ gelten, so heißt V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ oder ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (*$\mathbb{K}$-VR*). Die Elemente eines Vektorraumes heißen Vektoren .*

Allgemein: jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1.2 Untervektorräume und linearer Aufspann

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 1.3. *Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unter(vektor)raum oder linearer Teilraum von V, wenn*
(i) $U \neq \emptyset$ ist und
(ii) für alle $x, y \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$.

Definition 1.4. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren aus V. Eine Linearkombination (LK) der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist ein Vektor der Form*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq M \subseteq V$, so ist

$$lin(M) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in M \right\}$$

ein Untervektorraum von V, genannt der von M erzeugte Untervektorraum / lineare Aufspann von M.

1.3 Affine Teilräume

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt affiner Teil- oder Unterraum von V, falls es einen Untervektorraum U von V und ein $v \in V$ gibt mit

$$W = v + U = \{v + u : u \in U\}.$$

1.4 Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 1.5. *Man ninnt n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie linear abhängig. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind also genau dann linear abhängig, wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gibt, die nicht alle $= 0$ sind, mit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$.

1.5 Zeilenumformungen, Zeilenstufenform

Seien n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus dem $\mathbb{K}^m$ gegeben, deren lineare Unabhängigkeit wir untersuchen wollen. Dabei sei $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jm})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Wir schreiben die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als **Zeilen** in eine Matrix A, dh

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist eine $n \times m$-Matrix mit n Zeilen und m Spalten. Wir schreiben dafür $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

Die Matrix A bringen wir in eine Form, an der wir die lineare Unabhängigkeit der Zeilen ablesen können, mittels der folgenden Zeilenumformungen für eine gegebene $n \times m$-Matrix B mit Zeilen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^m$:

(Z1) Ersetze eine Zeile w_j durch αw_j, wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
(Z2) Ersetze eine Zeile w_j durch $w_j + \beta w_k$, wobei $\beta \in \mathbb{K}$ und $k \neq j$
(Z3) Vertausche die Zeilen w_j und w_k, wobei $j \neq k$.

Bemerkung 1.1. *Die Zeilen von B sind genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilen der umgeformten Matrix linear unabhängig sind.*

Satz 1.1. *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ kann man durch endlich viele Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{n\times m}$ überführen, die in Zeilenstufenform (ZSF) ist. Dabei heißt*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform, falls es ein $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq m$ gibt mit
(i) für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$;
(ii) für $j = r + 1, \ldots, n$ gilt $c_{jk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, m$.

1.6 Basen und Dimension, Zeilennormalform

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Satz und Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$ heißen Basis von V, falls sie linear unabhängig sind und $\operatorname{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = V$ gilt. In diesem Fall enthalten je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Zahl heißt die Dimension von V, geschrieben $\dim V$.

Bemerkung 1.2. *Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von Dimension n ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von Dimension $2n$.*

Bemerkung 1.3. *Wir betrachten die Vektoren $e_1, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$, wobei $e_j := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (alle Komponenten sind Null außer der j-ten). Dann ist $e_1, ..., e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ genannt die Standardbasis.*

Definition 1.6. *Ist $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$. Die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heißen Koordinaten von v bzgl. der Basis $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Zeilennormalform Eine Matrix, die in Zeilenstufenform ist, kann man durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform (ZNF) bringen. Dabei heißt $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ in Zeilennormalform , wenn sie in Zeilenstufenform ist und zusätzlich gilt:
(iii) für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt: $\gamma_j = c_{jk_j} = 1$ und $c_{lk_j} = 0$ für $l = 1, 2, \ldots, j-1$ (dh oberhalb von c_{jk_j} stehen auch nur Nullen).

1.7 Lineare Gleichungssysteme

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \ldots & +a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \ldots & +a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \ldots & +a_{nm}x_m & = b_n \end{array}$$

mit gegebenen $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$ und gesuchten $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$ in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder als $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben und $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ gesucht ist. Hierbei verwenden wir das Matrix-Vektor-Produkt :
Für $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{x} = (x_k)_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^m$ ist $A\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k \right)_{j=1}^{n} \in \mathbb{K}^n$.
Beachte: Wir schreiben Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, die wir bisher als m-Tupel geschrieben haben, ab jetzt ggf. als **Spaltenvektoren**! Dies ist die übliche Konvention.

1.8 Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \qquad (A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}, \qquad A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x},$$

wobei für $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ die Matrizen $A + B, \alpha A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gegeben sind durch

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m},$$

dh an jeder Stelle (j, k) werden die Einträge addiert bzw. mit α multipliziert.

1.9 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Wir setzen

$$\operatorname{Kern} A := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^m \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} A := \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n.$$

$\operatorname{Kern} A$ ist die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt inhomogen und $\vec{b}$ heißt Inhomogenität der Gleichung. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung, dann und nur dann wenn $\vec{b} \in \operatorname{Bild} A$.

Satz 1.2. *(1) $\operatorname{Kern} A$ ist ein Unterverktorraum von $\mathbb{K}^m$ und $\operatorname{Bild} A$ ist ein Unterverktorraum von $\mathbb{K}^n$.*

(2) $\operatorname{Bild} A$ ist der lineare Aufspann der Spalten von A.

(3) Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A\vec{x} = \vec{b} = A\vec{y}$, so ist $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Kern} A$. Ist $\vec{z} \in \operatorname{Kern} A$, so ist $A(\vec{x} + \vec{z}) = \vec{b}$. Insbesondere ist die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung, wenn sie nicht-leer ist, ein affiner Teilraum *von $\mathbb{K}^m$. (Also hat das System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen).*

1.10 Lösungsalgorithmus, Dimensionsformel

Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Zur Lösung erweitern wir die Matrix A um $\vec{b}$ als $(m + 1)$-te Spalte, betrachten also $(A \,|\, \vec{b}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$. Für $A = (a_{jk})$ und $\vec{b} = (b_j)$ ist

$$(A \,|\, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Wir werden Zeilenumformungen verwenden. Die Zeilenumformungen ändern nicht die Lösungsmenge des Systems.

Algorithmus (Eliminationsverfahren nach Gauß):
(1) Matrix A um $\vec{b}$ als letzte Spalte erweitern.
(2) Die erweiterte Matrix $(A \,|\, \vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF (oder ZSF) bringen.
(3) Lösbarkeit und Lösung ablesen.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösbarkeit: Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist **nicht lösbar** genau dann, wenn eine ZSF von $(A\,|\,\vec{b})$ die Form $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$ hat und es ein $j \in \{1,\dots,n\}$ gibt mit $c_{jk} = 0$ für $k = 1,\dots,m$ und $c_{j,m+1} \neq 0$.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösung: Für alle Spalten mit der Eigenschaft, dass kein Element von ihnen das erste nicht Null Element seiner Zeile ist, setzen wir den zugohörigen unbekannten als freien Parameter. Dann lösen wir auf bezüglich der anderen unbekannten.

Um den Kern einer Matrix A zu bestimmen lösen wir die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ mit dem Lösungsalgorithmus von Gauß. Um das Bild einer Matrix zu bestimmen
(1) Wir schreiben das zugehörige System wo die rechte Seite Parameter sind.
(2) Mit dem Algorithmus von Gauß bestimmen wir Bedingungen für die Lösbarkeit.
Den Kern kann man alternativ mit dem -1 Ergänzung Trick bestimmen und zwar
(1) Man bringt die Matrix A in Zeilennormalform.
(2) Man streicht die Zeilen die Null sind (wenn es solche Zeilen gibt)
(3) Man ergänzt die Matrix mit Zeilen deren Elemente Null sind, bis auf ein Element das -1 ist. Die Ergänzung wird so gemacht, damit die diagonalen Elemente der Matrix nur 1 und -1 sind.
(4) Der Kern ist der lineare Aufspann der Spalten der ergänzten -1.

Dimensionsformel Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt $\dim \mathrm{Kern}\, A + \dim \mathrm{Bild}\, A = n$.
Rang Wir definieren den Rang einer Matrix durch $\mathrm{Rang} A = \dim \mathrm{Bild}\, A$.
Satz Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\iff \mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}(A|\vec{b})$.

1.11 Lineare Abbildungen

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Definition 1.7. *Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt linear , (bzw. genauer* $\mathbb{K}$-linear*), falls für alle $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), \quad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x).$$

Für ein solches ϕ heißt

$$\mathit{Kern}\,\phi := \{x \in V : \phi(x) = 0\}$$

der Kern von ϕ und

$$\mathit{Bild}\,\phi := \{\phi(x) : x \in V\}$$

heißt Bild von ϕ.

Satz 1.3. *Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann gilt:*
(1) Kern$\,\phi$[bzw. Bild$\,\phi$] ist ein Unterraum von V [bzw. W].
(2) ϕ ist injektiv $\iff$ Kern$\,\phi = \{0\}$.

1.12 Das Produkt von Matrizen

Wie immer schreiben wir wieder $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Seien $n, m, q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times q}$ Matrizen mit $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ und $B = (b_{kl})_{k=1}^{m}{}_{l=1}^{q}$. Das <u>Matrixprodukt</u> $AB \in \mathbb{K}^{n\times q}$, ist die Matrix $C = (c_{jl})_{j=1}^{n}{}_{l=1}^{q}$ mit

$$c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kl}, \qquad j = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, q.$$

Eigenschaften des Produktes von Matrizen: Für alle $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{m\times q}$, $C \in \mathbb{K}^{q\times r}$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(A_1+\alpha A_2)B_1 = A_1B_1+\alpha A_2B_1, \quad A_1(B_1+\alpha B_2) = A_1B_1+\alpha A_1B_2, \quad (A_1B_1)C = A_1(B_1C).$$

1.13 Invertierbare Matrizen

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $I_n := (\delta_{jk})_{j,k=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die <u>Einheitsmatrix</u> (wir schreiben auch kurz I, wenn n aus dem Zusammenhang klar ist).

Es gilt dann $IA = AI = A \quad$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Definition 1.8. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt <u>regulär</u>, falls $\operatorname{Rang} A = n$ ist, und <u>invertierbar</u>, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $AB = BA = I$. In diesem Fall ist B eindeutig und heißt <u>Inverse von A</u> (oder <u>zu A inverse Matrix</u>). Sie wird mit A^{-1} bezeichnet.*

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar. Dann sind A^{-1} und AB invertierbar, und es gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad \text{und} \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Satz 1.4. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

$$A \text{ regulär} \iff \operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n \iff \operatorname{Kern} A = \{\vec{0}\} \iff A \text{ invertierbar.}$$

Bemerkung 1.4. *Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = I$, so sind A und B invertierbar und es gilt $A^{-1} = B$.*

Berechnung von A^{-1}: Man bringt die Matrix $(A|I)$ auf Zeilennormalform und bekommt $(I|A^{-1})$.

1.14 Lineare Abbildungen als Matrizen

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume von Dimension m bzw. n und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. In V und W seien geordnete[1] Basen $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_m})$ bzw. $C = (\vec{c_1}, \vec{c_2}, \ldots, \vec{c_n})$

[1]das bedeutet, dass die Reihenfolge der Elemente der Basis wichtig ist

gegeben. Dann gibt es genau eine Matrix bezeichnet durch ${}_C[\phi]_B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit der Eigenschaft

$$\phi\Big(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\vec{b_k}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\vec{c_j} \iff {}_C[\phi]_B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

${}_C[\phi]_B$ heißt dann Matrix zu ϕ bzgl. der Basen B und C .

Satz 1.5. *Seien U, V, Z $\mathbb{K}$-Vektorräume und B (bzw. C, bzw. D) eine Basis in U (bzw. V, bzw. C). Seien $\phi : U \to V$, $\psi : V \to Z$ lineare Abbildungen. Dann*

$${}_D[\psi\circ\phi]_B =_D [\psi]_C\ {}_C[\phi]_B.$$

2 Skalarprodukt und Orthogonalität

2.1 Skalarprodukte

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $(\cdot|\cdot) : V\times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(S1) $\forall x, y \in V$: $(x|y) = \overline{(y|x)}$,

(S2) $\forall x, y, z \in V$, $\alpha\in\mathbb{K}$: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$,

(S3) $\forall x \in V\setminus\{0\}$: $(x|x) > 0$.

heißt ein Skalarprodukt auf V. (Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und also V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so kann auf die komplexe Konjugation verzichtet werden, da $\overline{r} = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$.)

2.2 Eigenschaften

Eigenschaften eines Skalarproduktes auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V sind

$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$, $(x|0) = (0|x) = 0$,
$\forall x, y \in V : |(x|y)| \le \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

2.3 Normen

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\cdot|\cdot) : V\times V \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt, so hat die Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$, $v \mapsto \sqrt{(v|v)}$ folgende Eigenschaften:

(N1) $\forall v \in V$: $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$,

(N2) $\forall v \in V$, $\alpha\in\mathbb{K}$: $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, (N3) $\forall u, v \in V$: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung).

Definition 2.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften (N1)–(N3) heißt eine Norm auf V.*

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so wird für $u, v \in V$ die Zahl $\|u-v\| \geq 0$ als **Abstand** von u und v interpretiert, und es gilt $\|0\| = 0$, sowie

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \quad \text{(umgekehrte Dreiecksungleichung).}$$

2.4 Orthogonalität und Gram-Schmidt Verfahren

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ heißen orthogonal, falls für alle $j, k \in \{1, 2 \dots, m\}$ mit $j \neq k$ gilt $(v_j|v_k) = 0$. Statt $(v|w) = 0$ schreibt man auch $v \perp w$.

Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m$ heißen orthonormal , oder ein Orthonormalsystem (ONS), falls für alle j, k gilt: $(v_j|v_k) = \delta_{jk}$, dh also falls die Vektoren orthogonal sind und zusätzlich alle Norm 1 haben.

Ist V endlich-dimensional, so ist eine Orthonormalbasis (ONB) von V eine Basis von V, die ein Orthonormalsystem ist.

Satz 2.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ orthogonal. Dann sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig. Ist $v_1, v_2, \dots, v_m$ ein Orthonormalsystem in V und $v \in lin\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, dann gilt*

$$v = \sum_{j=1}^{m} (v|v_j) v_j.$$

Gram-Schmidt Verfahren

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt und $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ seien linear unabhängig.

Wir setzen $b_1 := v_1 / \|v_1\|$ und für $k = 2, \dots, m$:

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} (v_k|b_j) b_j, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|},$$

Dann $\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ und $b_1, b_2, \dots, b_m$ ist ein Orthonormales System.

Folgerung 2.1. *Jeder endlichdimensionale Vektorraum V mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis.*

2.5 Transponierte und adjungierte Matrizen

Für eine Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times m}$, die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die transponierte Matrix zu A und wird mit A^T bezeichnet. Für alle $k \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$ steht an der Stelle (k,j) in der Matrix A^T also der Eintrag a_{jk}, der in der Matrix A an der Stelle (j,k) steht. Setzen wir $B := A^T$ mit $B = (b_{kj})_{k=1}^{n}{}_{j=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$, so gilt also

$$b_{kj} = a_{jk}, \quad k \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}.$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{C}^{n\times m}$, für die an jeder Stelle (k,j) der Eintrag $\overline{a_{jk}}$ steht, die adjungierte Matrix zu A und wird mit A^* bezeichnet.

Bemerkung 2.1. *Setzt man $\overline{A} := (\overline{a_{jk}}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (konjugiert komplexe Matrix zu A), so gilt also*

$$A^* = \overline{A^T} = \left(\overline{A}\right)^T.$$

Schreibweisen des Standardskalarprodukts: Für $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^T\vec{x} = \vec{x}^T\vec{y}$.
Für $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n\times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^*\vec{x} = \overline{\vec{x}^*\vec{y}}$.

Rechenregeln: Für Matrizen A, B, deren Produkt erklärt ist, gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Für eine invertierbare Matrix A sind auch A^T und A^* invertierbar, und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \qquad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Folgerung 2.2. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann gilt:*

(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^T\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^*\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$.

2.6 Orthogonale und unitäre Matrizen

Eine wichtige Rolle spielen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, deren zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, das Skalarprodukt invariant lässt, dh für die gilt:

$$(A\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{K}^n.$$

Damit verändert A auch Winkel und Abstände nicht. Eine solche Matrix A hat Kern $A = \{\vec{0}\}$, ist also invertierbar. Aus den Rechenregeln folgt

$$A^T A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}), \qquad A^* A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit dieser Eigenschaft heißt orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Somit gilt

$$A^T = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ orthogonal}, A^* = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ unitär.}$$

Bemerkung 2.2. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

1) A ist genau dann unitär, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bilden.

2) A ist genau dann unitär, wenn für jedes Orthonormalsystem $v_1, \dots, v_m$ in $\mathbb{C}^n$ auch $Av_1, \dots, Av_m$ ein Orthonormalsystem von $\mathbb{C}^n$ ist.

3) Produkte, Inverse, Transponierte und Adjungierte von unitären Matrizen sind unitär.

(Erweiterung) Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ [bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$].

1) A ist genau dann orthogonal [bzw. unitär], wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ [bzw. $\mathbb{C}^n$] bilden.

2.7 Orthogonalprojektionen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $b_1, b_2, \dots, b_m$ ein Orthonormalsystem in V und $U := \operatorname{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Die lineare Abbildung

$$P : V \to U, v \mapsto Pv = \sum_{j=1}^{m} (v|b_j) b_j$$

hat die Eigenschaften: $P \circ P = P$, $\operatorname{Bild} P = U$, $\operatorname{Kern} P = \{v \in V : v \perp u \text{ für alle } u \in U\}$.

Es gilt $(v - Pv|u) = 0$ für alle $u \in U$, $v \in V$, und

$$\|v - Pv\| = \min\{\|v - u\| : u \in U\} \quad \text{für jedes } v \in V,$$

dh Pv ist die (eindeutig bestimmte) Bestapproximation von v in U. Die Abbildung P heißt Orthogonalprojektion von V auf U.

3 Determinanten

3.1 Definierende Eigenschaften der Determinante

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(D1) $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$,

(D2) für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_j \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \alpha\vec{a}_j + \beta\vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n) = \alpha\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \beta\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n),$$

(D3) Wenn wir zwei Spalten (Vektoren) vertauschen, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Bemerkung 3.1. *Durch die Eigenschaften (D1)–(D3) ist die Determinante* $\det$ *eindeutig bestimmt.*

Schreibweise: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$, so schreibt man auch

$$|A| := \det(A) := \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n).$$

Wir betrachten im folgenden $\det$ meist als Funktion auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Man kann auch die definierenden Eigenschaften mit Hilfe der Zeilen anstatt der Spalten definieren.

3.2 Folgerungen

(a) Ist eine Spalte $= 0$, so ist auch die Determinante $= 0$.

(b) Man kann zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

(c) Hat die Matrix zwei gleiche Spalten, dann hat sie Determinante Null.

(d) Sind die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ linear abhängig (dh gilt Rang $A < n$), so ist $\det(A) = 0$.

(e) Es gilt: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.

Alle obige Folgerungen gelten wenn Spalten durch Zeilen ersetzt werden.

3.3 Der Fall $n = 2$

Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

3.4 Der Fall $n = 3$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = avz + bwx + cuy - awy - buz - cvx.$$

Schema:

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & a & b & c & & & \\
 & & w & u & v & w & u & & \\
 & y & z & x & y & z & x & y & \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & & & & \searrow & \searrow & \searrow \\
- & - & - & & & & + & + & +
\end{array}
$$

3.5 Der allgemeine Fall

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit den Einträgen a_{jk}. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $A_{1k} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der ersten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

Man hat die folgende Formel, die das Berechnen von $\det(A)$ auf das Berechnen der Determinanten kleinerer Matrizen zurückführt:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}).$$

3.6 Determinantenentwicklungssatz

Für jedes $l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{lk} \det(A_{lk}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{jl} \det(A_{jl}),$$

wobei $A_{jk} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix bezeichne, die aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

3.7 Determinantenmultiplikationssatz

Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Insbesondere gilt für eine invertierbare Matrix A: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

3.8 Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme

Sei $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar mit den Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$. Dann hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, die eindeutige Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, mit:

$$x_j = \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{b}}_{j}, \ldots, \vec{a}_n)/\det(A), \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

3.9 Eine Formel für die inverse Matrix

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar mit Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$. Dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \Big(\det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{e}_k}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) \Big)_{j,k=1}^{n}.$$

3.10 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) in $\mathbb{R}^3$

Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ derjenige Vektor, der senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist und für den $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) \geq 0$ ist.

Hieraus ergeben sich folgende **Rechenregeln**:

(0) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

(1) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

(2) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{w} \times \vec{y})$ und $\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{x} \times \vec{z})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{w}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, dh das Kreuzprodukt ist linear in jeder Komponente.

(3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times (\vec{y} + \alpha\vec{x}) = (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \times \vec{y}$, dh man kann zu einer Variablen ein Vielfaches der anderen dazuaddieren.

(4) Es gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig sind.

Berechnung: Man berechnet $\vec{x} \times \vec{y}$ formal über eine Determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

3.11 Das Spatprodukt

Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ heißt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y} | \vec{z})$ das Spatprodukt von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Satz 3.1. *Es gilt* $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Index