Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik
Teil: Analysis

Wintersemester 2018/19

Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

Dies ist eine kurze Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Beispiele, Erläuterungen und veranschaulichen- den Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

Contents

1 Aussagen

1.1 Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** ist.

Im Rahmen der Vorlesung sind wir aber eher an **mathematischen Aussagen** interessiert. Aussagen bezeichnen wir im folgenden mit A, B, C, ...

1.2 Verknüpfung von Aussagen

Wir erklären die logische Verknüpfung von Aussagen durch sogenannte Wahrheitstafeln .

$A \wedge B$ (logisches "und" (AND))

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

$A \vee B$ (logisches "oder" (OR))

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Achtung: Das logische "oder" ist nicht exklusiv, dh es ist zugelassen, dass beide Aussagen A und B wahr sind.

Negation $\neg A$ ("non A" oder "nicht A")

A	w	f
$\neg A$	f	w

Implikation $A \Rightarrow B$ "wenn A, dann B", "A impliziert B", "aus A folgt B"

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Man sagt: "A ist äquivalent zu B", "A ist gleichbedeutend mit B", "A genau dann, wenn B", " A dann und nur dann, wenn B".

1.3 Regeln

$\neg$ bindet stärker als $\wedge/\vee$; $\wedge/\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow/\Leftrightarrow$.

$$\begin{array}{rcll}
\neg(\neg A) & \Leftrightarrow & A & \text{(doppelte Negation)} \\
(A \Leftrightarrow B) & \Leftrightarrow & [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] & \text{(Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen)} \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) & \text{(Negation von “und”)} \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) & \text{(Negation von “oder”)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee B) & \text{(Umformulierung der Implikation)} \\
\neg(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) & \text{(Negation der Implikation)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg B \Rightarrow \neg A) & \text{(\underline{Kontraposition}).}
\end{array}$$

Kommutativität: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

Assoziativität: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. Deshalb kann man hier die Klammern weglassen.

Distributivität: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

1.4 Quantoren

Eine Aussageform $A(x)$, $A(x, y)$, ... ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen x, y, ... enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete Objekte eine Aussage ist.

Der Allquantor $\forall x : A(x)$ bedeutet: für alle Objekte x ist die Aussage $A(x)$ wahr.

Der Existenzquantor $\exists x : A(x)$ bedeutet: es gibt (mindestens) ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Negation: $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x))$ und $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x))$.

In den allermeisten Fällen werden Quantoren eingeschränkt und beziehen sich dann nur auf gewisse Objekte, z.B. $\forall x$ mit $A(x) : B(x)$. Die Negation davon ist dann $\exists x$ mit $A(x) : \neg B(x)$.

Achtung: Bei All- und Existenzquantor kommt es i.a. auf die Reihenfolge an.

Bemerkung: Häufig schreiben wir Quantoren nicht als Zeichen, sondern sprachlich.

2 Mengen

2.1 Der Begriff der Menge

Wir verwenden die folgende naive “Definition”:

"Eine Menge ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte."

Diese Objekte heißen Elemente der Menge.

$x \in M$ bedeutet: x ist Element der Menge M, dh x gehört zu M.

$x \notin M$ bedeutet: x gehört nicht zu M, dh $x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Schreibweisen: Ist $A(x)$ eine Aussageform, so kann man schreiben

$$M = \{x : A(x)\} = \text{Menge aller } x \text{, für die } A(x) \text{ gilt},$$

Häufig schreibt man auch, wenn die Menge M gegeben ist, $\{x \in M : A(x)\}$ für $\{x : (x \in M) \wedge A(x)\}$. Eine andere Möglichkeit ist die Aufzählung, z.B. $M = \{1, 2, 3, 9\}$.

2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Seien M_1, M_2 Mengen.

Definition 2.1. *"M_1 ist Teilmenge von M_2":*

$$M_1 \subseteq M_2 \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2) \quad (\textit{bzw. } \forall x \in M_1 : x \in M_2).$$

Für $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$ schreibt man oft der Deutlichkeit halber $M_1 \subsetneqq M_2$.

Gleichheit von Mengen: $M_1 = M_2$ bedeutet, dass M_1 und M_2 dieselben Elemente enthalten, also $\forall x : (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$. Da Äquivalenz zwei Implikationen bedeutet (siehe 1.3) bedeutet $M_1 = M_2$ also $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

2.3 Operationen mit Mengen

Seien M_1, M_2, M_3 und Q Mengen. D (a) Durchschnitt $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$.

(b) Vereinigung $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$.

(c) Differenz $M_1 \setminus M_2 := \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$ ("M_1 ohne M_2").

Regeln für Durchschnitt und Vereinigung:

Kommutativität $\quad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \qquad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$

Assoziativität $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3, \qquad M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3.$

Distributivität:

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3), \quad M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

Außerdem ist $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$.

de Morgansche Regeln: Wegen 1.3 (Negation von "und"/"oder") gilt auch

$$Q \setminus (M_1 \cup M_2) = (Q \setminus M_1) \cap (Q \setminus M_2), \qquad Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

2.4 Die leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente, dh $\forall x : x \notin \emptyset$.

Regeln: $M \cup \emptyset = M$, $M \setminus \emptyset = M$, $M \cap \emptyset = \emptyset$, $M \setminus M = \emptyset$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

2.5 Das kartesische Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien M_1, M_2, $\ldots$, M_n Mengen. Die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in M_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ der Mengen M_1, M_2, $\ldots$, M_n. Also

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ gilt } x_j \in M_j\}.$$

Wir schreiben M^n, falls $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$ gilt.

2.6 Die Mengen der reellen und komplexen Zahlen

Reelle Zahlen und Betrag

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen. Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a .

Beachte: Es gilt $|a| = |-a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also auch $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Anschaulich ist $|a - b|$ der **Abstand** von a und b auf der Zahlengeraden.

Regeln: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|a| \geq 0$; (2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; (3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(4) $\pm a \leq |a|$ und $\Big(|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; (a \leq c \text{ und } -a \leq c)\Big)$;

(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung ;

(6) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ umgekehrte Dreiecksungleichung .

Die Menge der komplexen Zahlen

Wir betrachten eine Zahl i, mit $i^2 = -1$. Es ist dann

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{die Menge der komplexen Zahlen.}$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt x der Realteil von z (geschrieben $\operatorname{Re} z$) und y heißt der Imaginärteil von z (geschrieben $\operatorname{Im} z$). Komplexe Zahlen z mit $\operatorname{Re} z = 0$ heißen rein imaginär und komplexe Zahlen mit $\operatorname{Im} z = 0$ heißen reell.

Also: Man kann mit komplexen Zahlen wie gewohnt rechnen und muss nur $i^2 = -1$ berücksichtigen, etwa

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2),$$

Konjugation und Betrag Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die konjugierte komplexe Zahl . Es gilt dann $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ und $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt Betrag der komplexen Zahl z.

Rechenregeln: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{(\overline{z})} = z, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \ ,$$

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

$|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung) und $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Eine komplexe Zahl ist Null genau dann, wenn Real- und Imaginärteil beide Null sind. Ist $x + iy \neq 0$, so ist das multiplikativ Inverse gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

3 Funktionen

3.1 Zum Begriff der Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) $f : X \to Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu. Für das einem gegebenen $x \in X$ zugeordnete $y \in Y$ schreiben wir $f(x)$.

Schreibweise $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ (“f von X nach Y, x wird abgebildet auf $f(x)$”).

Die Menge $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt Graph von f. Man kann diesen mit der Funktion f identifizieren.

Für eine Funktion $f : X \to Y$ heißt X Definitionsbereich und Y Wertebereich von f. Für $A \subseteq X$ heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ Bild von A unter f, und für $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B unter f. Insbesondere heißt $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ Bild von f (Menge aller $y \in Y$, die von f getroffen werden).

Definition 3.1. *Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.*

(a) f heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt, dh falls jedes $y \in Y$ von f getroffen wird.

(b) f heißt injektiv, falls gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, dh falls es zu jedem Element im Bild von f genau ein Urbild gibt.

(c) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

3.2 Komposition

Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen, so definiert $g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$ eine Funktion $g \circ f$ ("g nach f"), die Hintereinanderausführung oder Komposition von f und g.

Satz 3.1. *Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Funktionen, so gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

dh die Hintereinanderausführung von Funktionen ist assoziativ.

3.3 Die Umkehrabbildung

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion, so definiert

$$Y \to X, \quad y \mapsto x, \text{ falls } f(x) = y$$

eine Funktion f^{-1}, die Umkehrabbildung (oder Umkehrfunktion) von f.

Beachte: Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem y ein solches x. Da f injektiv ist, ist dieses x eindeutig bestimmt. Somit ist f^{-1} tatsächlich eine Funktion.

Bemerkung 3.1. *Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$.*

Satz 3.2. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Funktionen mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, so ist f bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$.*

Bemerkung 3.2. *Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt auch $f = g^{-1}$ und insbesondere $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Satz 3.3. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen, so ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$.*

4 Gründlichere Einführung der reellen Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen . Wir führen diese Menge durch 15 Axiome ein, dh durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich **alle** weiteren Rechenregeln herleiten lassen. Wir nehmen dann $\mathbb{R}$ als mit diesen Axiomen gegeben an. Eine explizite Konstruktion (die natürlich möglich ist!), führen wir hier nicht durch.

4.1 Körperaxiome

Es gibt Verknüpfungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("plus", wir schreiben $a + b$) und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("mal", wir schreiben ab oder $a \cdot b$) mit

$$\begin{aligned}
\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a+b)+c &= a+(b+c) \quad (A1) && (ab)c = a(bc) \quad (A5) \\
\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 &= a \quad (A2) && \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \quad (A6) \\
\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) &= 0 \quad (A3) && \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 \quad (A7) \\
\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b &= b + a \quad (A4) && ab = ba \quad (A8) \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b+c) &= ab + ac \quad (A9) &&
\end{aligned}$$

Dabei sind $(A1)$ und $(A5)$ die Assoziativgesetze , $(A4)$ und $(A8)$ die Kommutativgesetze, und $(A9)$ ist das Distributivgesetz.

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir $a - b := a + (-b)$ und, falls $b \neq 0$ ist, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

4.2 Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine Ordnung "$\leq$" gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&(A10) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ oder } b \leq a, \\
&(A11) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c, \\
&(A12) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b, \\
&(A13) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \\
&(A14) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc.
\end{aligned}$$

$(A11)$ heißt Transitivität, $(A12)$ heißt Antisymmetrie. Außerdem beinhaltet $(A10)$ auch, dass $a \leq a$ gilt (Reflexivität).

$(A13)$ und $(A14)$ bedeuten, dass die Ordnung $\leq$ mit den Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" verträglich ist.

Schreibweisen: $b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b$; $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\Leftrightarrow a < b$.

Bemerkung 4.1. *Aus* $(A1) - (A14)$ *lassen sich alle Rechenregeln für Ungleichungen herleiten. Diese setzen wir von nun an als bekannt voraus.*

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,}\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall,}\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\},\\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},\\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le a\},\\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.
\end{aligned}$$

Weiter: $[a,a] := \{a\}$ und $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$.

4.3 Supremum und Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.

M heißt nach oben [unten] beschränkt $:\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall x \in M : x \le \gamma$ $[x \ge \gamma]$.

In diesem Fall heißt γ eine obere Schranke (OS) [untere Schranke (US)] von M.

Eine obere Schranke [untere Schranke] γ von M mit $\gamma \in M$ heißt Maximum [Minimum] von M und wird mit $\max M$ [$\min M$] bezeichnet.

Wegen ($A12$) sind $\max M$ und $\min M$ im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

Definition 4.1. *Ist γ obere Schranke [untere Schranke] von M mit $\gamma \le \tilde{\gamma}$ [$\gamma \ge \tilde{\gamma}$] für **jede** obere Schranke [untere Schranke] $\tilde{\gamma}$ von M, so heißt γ Supremum [Infimum] von M (**kleinste** obere Schranke von M [**größte** untere Schranke von M]) und wird mit* $\sup M$ *[*$\inf M$*] bezeichnet.*

Nach ($A12$) sind Supremum und Infimum im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

Bemerkung 4.2. *Ein Maximum ist immer auch Supremum, und es gilt* $\sup M = \max M$ *genau dann, wenn* $\sup M \in M$ *ist (entsprechend für* min *und* inf*).*

4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

($A15$) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Folgerung 4.1. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Definition 4.2. *Eine Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt , falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Bemerkung 4.3. *M beschränkt* $\Leftrightarrow \exists \gamma \geq 0 \forall x \in M : |x| \leq \gamma$.

Satz 4.1. *Sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) A beschränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

(2) A nach oben [nach unten] beschränkt $\Rightarrow$ B nach oben [nach unten] beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ *[*$\inf B \geq \inf A$*].*

(3) Sei A nach oben [nach unten] beschränkt und γ eine obere Schranke [untere Schranke] von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma = \sup A &\iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } x \in A \text{ mit } x > \gamma - \varepsilon \\ [\gamma = \inf A &\iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } x \in A \text{ mit } x < \gamma + \varepsilon]. \end{aligned}$$

4.5 Natürliche Zahlen

Satz 4.2. *Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.*

(1) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.
(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.
(3) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

4.6 Vollständige Induktion

Beweisverfahren durch Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

$$\begin{aligned} \text{Induktionsanfang } (IA) &\quad A(1) \\ \text{Induktionsschritt } (IS) &\quad \forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1)). \end{aligned}$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr, dh es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Definition durch Rekursion (bzw. durch Induktion)

Es sei $G(1)$ definiert, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G(n+1)$ definiert unter der Voraussetzung, dass $G(1)$, $G(2)$, $\ldots$, $G(n)$ schon definiert sind.

Dann hat man $G(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Varianten der Induktion: Man kann die Induktion auch bei z.B. $n = 5$ beginnen lassen. Zum Beweis von "$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5 : A(n)$" hat man dann zu zeigen:

$$\begin{aligned} (IA) &\quad A(5) \\ (IS) &\quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5 : (A(n) \Rightarrow A(n+1)). \end{aligned}$$

Bei der Abschnittsinduktion zeigt man

$$\begin{aligned} (IA) &\quad A(1) \\ (IS) &\quad \forall n \in \mathbb{N} : (A(1) \wedge A(2) \wedge \ldots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)). \end{aligned}$$

4.7 Ganze und rationale Zahlen

Definition 4.3. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ *Menge der ganzen Zahlen* und $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ *Menge der rationalen Zahlen* .

Satz 4.3. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{Z}$ *hat ein Minimum.*

4.8 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ setzt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ („}n\text{ über }k\text{").}$$

Es gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n \geq k \geq 0$, $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Lemma 4.1. *Für* $1 \leq k \leq n$ *gilt* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

4.9 Potenzen

Setze für $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1$, $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die bekannten Rechenregeln, also etwa $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ und $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

(2) **Binomialsatz:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(3) **Bernoullische Ungleichung** (BU): Sei $x \geq -1$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

(4) Für alle $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.

Folgerung 4.2. *Sei* $a \in \mathbb{R}$. *Ist* $a > 1$, *so gibt es zu jedem* $K > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $a^n > K$. *Ist* $a \in (0,1)$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $a^n < \varepsilon$.

4.10 Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $b^n = a$. Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a}$, „n-te Wurzel aus a".

Folgerung 4.3. *Für alle* $a, b \geq 0$ *gilt wegen 4.9 Rechenregel (4):*
$a \leq b \iff \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$, *und wegen* $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = ab$ *gilt* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

5 Mehr über die komplexen Zahlen

Polarkoordinaten und Eulerformel: Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ (wobei $x, y \in \mathbb{R}$) kann man schreiben mithilfe ihres Betrages $r = |z|$ und des Winkels φ zur positiven x-Achse (dh mithilfe von Polarkoordinaten). Es ist nämlich $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ nach Schulmathematik. Verwendet man die Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}),$$

so erhält man $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}$. Multiplikation mit z dreht dann um den Winkel φ.

Sind sin und cos bekannt, so kann man die Eulerformel als Definition von $e^{i\varphi}$ verwenden.

5.1 Polynome

Ein Polynom p (oder $p(z)$) mit komplexen Koeffizienten ist ein formaler Ausdruck $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Das Polynom heißt reell , wenn alle Koeffizienten a_j reell sind.

Das Polynom heißt vom Grad n , falls $a_n \neq 0$ gilt, und zusätzlich normiert , falls $a_n = 1$ ist.

Falls $a_n = 0$ ist, so ist auch $p(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, dh führende Nullkoeffizienten kann man weglassen.

Es gilt insbesondere

$$p(z) \text{ hat den Grad } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(z) = a_0 \text{ und } a_0 \neq 0.$$

Das Nullpolynom $p(z) = 0$ hat keinen Grad.

Die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten (in der "freien Variablen" z) bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[z]$.

Definition 5.1. *Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$ heißt Nullstelle des Polynoms p.*

5.2 Polynomdivision

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]\setminus\{0\}$ Polynome vom Grad n bzw. $k \leq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $m \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{C}[z]$ mit $\operatorname{Grad} m = n - k$ und $r = 0$ oder $\operatorname{Grad} r < k$ und $p = mq + r$ (Division mit Rest).

Satz 5.1. *Ist $p \in \mathbb{C}[z]$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ und ist z_0 Nullstelle von p, so gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n - 1$ mit*

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0).$$

Dabei heißt $z - z_0$ Linearfaktor.

Definition 5.2. *Die Vielfachheit (Vfh) einer Nullstelle z_0 von p gibt an, wie oft man $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - z_0$ dividieren kann.*

Folgerung 5.1. *Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

5.3 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Folgerung 5.2. *Ist $p(z)$ normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Eine feste Nullstelle z_0 von $p(z)$ kommt dabei in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so oft vor, wie ihre Vielfachheit angibt.

5.4 Die Gleichung $z^n = c, c \in \mathbb{C}$

Um die Gleichung zu lösen schreibt man c in Polarkoordinaten ($c = re^{i\phi}$) und benutzt man den Folgenden Satz

Satz 5.2. *Die Lösungen von $z^n = re^{i\phi}$ sind: $z_j = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(2j\pi+\phi)}{n}}, j = 0, 1, ..., n-1$.*

6 Folgen und Konvergenz

Definition 6.1. *Eine reelle [komplexe] Zahlenfolge oder Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ [bzw. $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$].*
Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n) oder auch $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

6.1 Konvergenz

Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$]. Wir sagen, dass (a_n) gegen a konvergiert und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \underbrace{n_0}_{= n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Das bedeutet: "die a_n kommen a beliebig nahe" oder "der Abstand $|a_n - a|$ wird beliebig klein".

Die Zahl a heißt dann Limes oder Grenzwert der Folge (a_n).

Eine Folge (a_n) heißt konvergent , falls es ein $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$] so gibt, dass (a_n) gegen a konvergiert. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent .

Schreibweisen: Statt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ schreibt man auch $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a_n \to a$.

Bemerkung 6.1. *(1) Für jede Zahlenfolge* (a_n) *und jedes* a *gilt:* $\lim a_n = a \iff \lim |a_n - a| = 0$.

Insbesondere ist für $a = 0$*:* $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$. *(2) Für* $b \in \mathbb{C}$ *gilt:* $\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \iff |b| < 1$.

(3) Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

(4) Eine konvergente Folge (a_n) *ist beschränkt , dh die Menge* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ist beschränkt.*

(5) Ist (z_n) *eine komplexe Zahlenfolge, so ist* (z_n) *genau dann konvergent, wenn die reellen Zahlenfolgen* $(\mathit{Re}\, z_n)$ *und* $(\mathit{Im}\, z_n)$ *konvergent sind. Genauer gilt für* $z_0 \in \mathbb{C}$*:*

$$z_n \to z_0 \iff \mathit{Re}\, z_n \to \mathit{Re}\, z_0 \text{ und } \mathit{Im}\, z_n \to \mathit{Im}\, z_0$$

Wir beschränken uns deshalb weitgehend auf reelle Zahlenfolgen.

Für $p \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man auch $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ als Folge.

Wir sagen, dass eine Eigenschaft für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Eigenschaft für alle $n \geq n_0$ gilt.

6.2 Grenzwertsätze

Seien (a_n), (b_n), (α_n) und (c_n) reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $|a_n - a| \leq \alpha_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \Longrightarrow a_n \to a$.

(2) $a_n \to a \Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

(3) $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \Longrightarrow a \leq b$.

(4) $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \Rightarrow c_n \to a$.

(5) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$. Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

6.3 Monotone Folgen

Eine reelle Folge (a_n) heißt

monoton wachsend,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$,
monoton fallend,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$,
streng monoton wachsend,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$,
streng monoton fallend,	falls	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.

Satz 6.1. *Ist eine monoton wachsende [bzw. fallende] reelle Folge* (a_n) *beschränkt, so konvergiert sie, und zwar gegen* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *[bzw.* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*].*

6.4 Wichtige Beispiele

(1) $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ und $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

(2) $\sqrt[n]{n} \to 1$:

(3) Konvergiert die Folge (a_n) gegen a so gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$. Denn es gilt auch $a_{n+1} \to a$.

(4) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (s_n) konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist. In diesem Falle gilt $\lim s_n = (1-z)^{-1}$.

6.5 Teilfolgen

Ist (a_n) eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (dh $(k(n))$ ist eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen), so heißt die Folge $(a_{k(n)})$ Teilfolge (TF) von (a_n).

Eine Zahl b heißt Häufungswert (HW) der Folge (a_n) , falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen b konvergiert.

Satz 6.2 ((Bolzano-Weierstraß)). *Jede beschränkte Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge, dh jede beschränkte Zahlenfolge hat einen Häufungswert.*

Bemerkung 6.2. *Der Satz gilt auch für komplexe Zahlenfolgen.*

6.6 Rechnen mit ∞

Sei (a_n) eine reelle Folge.

$$\begin{aligned} a_n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K, \\ a_n \to -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < K. \end{aligned}$$

Also $a_n \to \infty$ $[a_n \to -\infty]$, falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ gilt, dass $a_n > K$ $[a_n < K]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Achtung: Man redet hier nicht von "Konvergenz" und auch nicht von "Grenzwert" , denn $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, dh ∞ und $-\infty$ sind keine **Zahlen**. Man sagt jedoch etwa "die Folge a_n geht gegen unendlich" und schreibt auch $\lim_n a_n = \infty$.

Bemerkung 6.3. *(a) Gilt* $a_n \to \pm\infty$*, so folgt* $|a_n| \to \infty$ *und* $1/a_n \to 0$*. Ist* $a_n > 0$ *für alle* n *und* $a_n \to 0$*, so folgt* $1/a_n \to \infty$*.*

(b) Ist die reelle Folge (a_n) nicht nach oben [unten] beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ von (a_n) mit $a_{k(n)} \to \infty$ [bzw. mit $a_{k(n)} \to -\infty$].

(c) Für jede monoton wachsende [monoton fallende] Folge (a_n) gibt es $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [bzw. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$] mit $a_n \to a$.

Konventionen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.

Man setzt für $a \in \mathbb{R}$: $a+\infty = \infty$, $a-\infty = -\infty$, sowie für $a > 0$: $a\cdot\infty = \infty$, $a\cdot(-\infty) = -\infty$ und für $a < 0$: $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$.

Außerdem setzt man $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ und $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$.

Achtung: Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ und $\infty - \infty$ sind **nicht definiert!**

Regeln: Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n + b_n \to a + b, &\quad \text{falls} \quad a + b \text{ definiert ist,} \\ a_n \cdot b_n \to a \cdot b, &\quad \text{falls} \quad a \cdot b \text{ definiert ist.} \end{aligned}$$

Beachte, dass Bemerkung (a) oben das Verhalten von $(1/a_n)$ beschreibt.

Definition 6.2. *Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.*

$$\begin{aligned} \sup M = \infty &\quad :\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach oben beschränkt,} \\ \inf M = -\infty &\quad :\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach unten beschränkt.} \end{aligned}$$

Bemerkung 6.4. *Manchmal findet man auch* $\sup \emptyset := -\infty$ *und* $\inf \emptyset := \infty$.

Bemerkung 6.5. *Man hat also für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} \sup M = \infty &\quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists x \in M : x > K, \\ \inf M = -\infty &\quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists x \in M : x < -K. \end{aligned}$$

6.7 Limes superior und Limes inferior

Sei (a_n) eine reelle Folge. Ist

$$A := \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \text{ es gibt Teilfolge von } a_k(n) \text{ mit } a_{k(n)} \to a\}$$

dann gilt immer $A \neq \emptyset$. A hat immer ein Maximum M und ein Minimum m, wobei, wenn z.B. $\infty \in A$ dann sagen wir $\max A := \infty$, also der Begriff des Maximums/Minimums hier erweitert den Begriff des Maximums/Minimums einer Teilmenge der reellen Zahlen.

Definition 6.3. *Wir definieren* $\liminf a_n := m, \limsup a_n := M$.

Ist (a_n) nach beschränkt, dann ist

$$A = \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : a \text{ ist Häufungswert von } a_n\}.$$

Also ist $\liminf a_n$ [bzw. $\limsup a_n$] der kleinste [bzw. größte] Häufungswert von a_n.

Schreib- und Sprechweisen: Man schreibt auch kurz $\limsup_n a_n$ oder $\limsup a_n$, sowie $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}_n a_n$, $\overline{\lim} a_n$ und spricht vom "Limes superior" , entsprechend für $\liminf$ mit $\underline{\lim}$ (" Limes inferior") .

Bemerkung 6.6. *Ist a_n eine Folge und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann gilt*

$$a_n \to a \iff A = a \iff \liminf a_n = \limsup a_n = a.$$

Zusätzlich gilt: $a_n \to a \implies a_{k(n)} \to a$ für alle Teilfolgen $a_{k(n)}$ von a_n

7 Reihen

7.1 Definition und Elementare Eigenschaften

Definition 7.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (unendliche) Reihe und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Die Zahl s_N heißt N-te Partialsumme oder N-te Teilsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent [divergent], falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert [bzw. divergiert]. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{N\to\infty} s_N$ der Reihenwert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Bemerkung 7.1. *(a) Die Folge (a_n) kann hier reell oder komplex sein. Ist (a_n) komplex, so heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} Re\, a_n$ Realteil der komplexen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} Im\, a_n$ heißt Imaginärteil von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

*(b) Eine komplexe Reihe konvergiert genau dann, wenn ihr Realteil **und** ihr Imaginärteil **beide** konvergieren. In diesem Fall ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} Re\, a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} Im\, a_n$, also $Re\,(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Re\, a_n$ und $Im\,(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Im\, a_n$.*

Wichtige Beispiele: (1) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, wobei $z \in \mathbb{C}$, konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Für $|z| < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}$.

(2) Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, k \geq 2$ ist konvergent.

Satz 7.1. *Seien (a_n) und (b_n) Folgen und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$, $N \in \mathbb{N}$.*

*(1) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(2) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, $p \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=p+1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=p+1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_n - \sum_{n=1}^p a_n$.

(3) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und definiert man $r_N := \sum_{n=N+1}^\infty a_n$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, so gilt $r_N \to 0$ $(N \to \infty)$, dh die "Reihenendstücke" konvergieren gegen Null.

(4) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so folgt $a_n \to 0$.

(5) Sind $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$), so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt $\sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^\infty a_n + \beta \sum_{n=1}^\infty b_n$.

7.2 Absolut konvergente Reihen

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ heißt absolut konvergent , falls $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konvergiert (dh also, falls die Reihe über die Absolutbeträge der a_n konvergiert).

Satz 7.2. *Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und es gilt die "Dreiecksungleichung für Reihen":*

$$\Big|\sum_{n=1}^\infty a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n|.$$

7.3 Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

(1) Gilt $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent.

(2) Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^\infty b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergent.

7.4 Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Sei (b_n) eine **monoton fallende** Folge mit $b_n \to 0$. Setzt man $a_n := (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

7.5 Wurzelkriterium

Sei (a_n) eine Folge und $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

(1) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Bemerkung 7.2. *Ist $\alpha = 1$, so liefert das Wurzelkriterium keine Entscheidung.*

7.6 Quotientenkriterium

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für n mit $a_n \neq 0$.

(1) Ist $c_n \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(2) Ist $\limsup c_n < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung 7.3. *Konvergiert (c_n) gegen α, so ist für $\alpha < 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und für $\alpha > 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Im Falle $\alpha = 1$ ist **keine** allgemeine Aussage möglich.*

7.7 Die Exponentialreihe

Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Definition 7.2. *Die Eulersche Zahl ist $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.*

Satz 7.3. *Es gilt $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.*

7.8 Das Cauchyprodukt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 7.4. *Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut konvergent**, so ist auch ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.*

7.9 Die Exponentialfunktion

Da die Exponentialreihe nach 7.7 für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir durch

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine Funktion definieren, E heißt die komplexe Exponentialfunktion .

(0) Es gilt $E(0) = 1$ und $E(1) = e$

(1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z)E(w) = E(z + w)$.

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$, sowie $E(z)^n = E(nz)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) \in \mathbb{R}$ und $E(x) > 0$; für $x > 0$ gilt $E(x) > 1$.

(4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

(5) Es ist $\sup\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $\inf\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

(6) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$.

(7) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $E(x + iy) = E(x)E(iy)$ und $|E(iy)| = 1$.

(8) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt[n]{E(x)} = E(\frac{x}{n})$.

(9) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(\operatorname{Re} z)$.

(10) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt $|E(h) - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(11) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

Bemerkung und Definition: Wegen (2), (8) und 7.7 gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e^m = E(m), \quad \sqrt[n]{e} = E\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \sqrt[n]{e^m} = E\Big(\frac{m}{n}\Big) = \big(\sqrt[n]{e}\big)^m.$$

Man schreibt deshalb auch $e^z := E(z)$ oder $\exp(z) := E(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

7.12 Sinus und Cosinus Wir definieren die Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

(0) Es ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$.

(1) **Reihendarstellungen:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots. \end{aligned}$$

(2) **Eulerformel:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x \in \mathbb{R}$ und $\cos x \in \mathbb{R}$, sowie

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\quad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, also $|\sin x| \leq 1, \; |\cos x| \leq 1$.

(4) **Additionstheoreme:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z + w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\ \cos(z + w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

Abschätzungen:

(4) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\sin h| \leq |h|E(|h|)$.

(5) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\cos h - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(6) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\sin h}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(7) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\cos h - 1}{h}| \leq |h|E(|h|)$.

Man kann die Exponentialfunktion e^z so definieren: $e^z = E(z)$.

Definition 7.3. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine* Potenzreihe (PR) um z_0 *hat die Form* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Die a_n heißen* Koeffizienten *der Potenzreihe und z_0 heißt* Entwicklungspunkt.

Wir nennen eine Potenzreihe reell, *falls $z_0 \in \mathbb{R}$ und alle a_n reell sind.*

Definition 7.4. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius ist definiert durch*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

Satz 7.5. $|z - z_0| < R \implies$ *Potenzreihe absolut konvergent.*
$|z - z_0| > R \implies$ *Potenzreihe divergent.*

Satz 7.6. *(Konvergenzradius R über Quotienten): Sei $\sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Wenn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \infty$, dann $R = \frac{1}{\alpha}$.*

Achtung: $\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oder $\liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ geben nicht, was der Konvergenzradius ist.

8 Stetigkeit

8.1 Limes, Definition der Stetigkeit, Kriterien für Stetigkeit

Definition 8.1 (Limes). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, y \in \mathbb{R}$. Wir sagen*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y,$$

wenn $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, so dass

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Bemerkung 8.1. *Der Limes kann ähnlich definiert werden, wenn $f : D \to \mathbb{R}$, mit D Intervall oder endliche Vereinigung von Intervallen [1]. In diesem Fall muss $0 < |x-x_0| < \delta$ durch $x \in D$ und $0 < |x - x_0| < \delta$ ersetzt werden. Im Rest der Vorlesung ist mit D eine solche Menge gemeint. Der Limes kann auch für kompliziertere Mengen definiert werden, aber wir führen hier die Definition nicht ein.*

[1] Hier das Intervall $[a, a] = \{a\}$ ist nicht zu berücksichtigen

Definition 8.2. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ [2]. f heißt stetig in x_0, wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heißt stetig, falls sie stetig in y ist $\forall y \in D$.

Satz 8.1. *(i) Alle folgende Funktionen sind stetig: Polynome, sin, cos, Exponentialfunktion.*
(ii) f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0) \implies g \circ f$ ist stetig in x_0.
(iii) wenn f, g stetig in x_0, dann $f + g, f \cdot g$ sind stetig in x_0. Wenn dazu $g(x_0) \neq 0$ dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Satz 8.2. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \lim f(x_n) = y, \text{ für alle Folgen in } D/\{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0.$$

8.2 Zwischenwertsatz

Satz 8.3 (Zwischenwertsatz)**.** *Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn $f(a) < f(b)$ $[f(a) > f(b)]$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$ $[f(a) > c > f(b)]$ dann $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = c$.*

Folgerung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein Intervall ist. Dann ist $f(I)$ auch ein Intervall.

8.3 Einseitige Grenzwerte

Definition 8.3 (Einseitige Grenzwerte)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, y \in \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = y \quad [bzw. \ \lim_{x \to x_0-} f(x) = y],$$

wenn $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, so dass $x_0 < x < x_0 + \delta$ [bzw. $x_0 - \delta < x < x_0$] $\implies |f(x) - y| < \epsilon$. In diesem Fall heißt y rechtsseitiger [bzw. linksseitiger] Limes von f in x_0.

Satz 8.4. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, y \in \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0-} f(x) = y \text{ und } \lim_{x \to x_0+} f(x) = y \right).$$

Bemerkung 8.2. *Die Definition und der Satz oben sind anwendbar für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$, wenn es sinnvoll ist, $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ zu betrachten.*

Bemerkung 8.3. *Man kann $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ mit $x_0, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = y$ mit $x_0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Die Definitionen sind ähnlich wie im Fall von folgen, und die Intuition ist die gleiche.*

[2] Der Begriff der stetigen Funktion kann für D eine beliebige nicht leere Teilemge von $\mathbb{R}$ eingeführt werden (und nicht nur für endliche Verreinigung von Intervallen). Hier führen wir aber diese Definition nicht ein.

8.4 Monotone Funktionen

Definition 8.4. *Sei* $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* f *heißt* monoton wachsend *[bzw.* monoton fallend*], falls für alle* $x_1, x_2 \in D$ *gilt:*

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\textit{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)].$$

f *heißt* streng monoton wachsend *[bzw.* streng monoton fallend*], falls für alle* $x_1, x_2 \in D$ *gilt:*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad [\textit{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

f *heißt* monoton*, falls* f *monoton wachsend oder monoton fallend ist, und* f *heißt* streng monoton*, falls* f *streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Satz 8.5. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

(a) Dann ist f *injektiv und die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

(b) Ist f *zusätzlich stetig, so ist* $f(I)$ *ein Intervall und* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

9 Logarithmus und trigonometrische Funktionen

Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (Exponentialfunktion) ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Definition 9.1 (Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *heißt (*natürlicher*)* Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$*, d.h. also* $\ln x := \exp^{-1}(x)$ *für* $x \in (0, \infty)$*.*

Eigenschaften: ln ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$, $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$, sowie $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$. Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{und} \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

Definition 9.2 (Die allgemeine Potenz)**.** *Wir definieren für* $a > 0$ *die allgemeine Potenz:*

$$a^x := \exp(x \ln a) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $a > 0, a \neq 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton, stetig und bijektiv.

Definition 9.3 (Der allgemeine Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion von* a^x *bezeichnet durch* $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *heißt* Logarithmus zur Basis a*. Es ist also* $\log_a(a^x) = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $a^{\log_a y} = y$ *für alle* $y \in (0, \infty)$*.*

Satz 9.1. *Für alle* $y \in (0,\infty)$ *gilt* $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

Satz 9.2. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq b$ *und* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann hat* f *ein Minimum und ein Maximum in* $[a,b]$*, d.h. es gibt* $x_1, x_2 \in [a,b]$*, so dass*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a,b].$$

Bemerkung 9.1. *Die Aussage des Satzes gilt auch, wenn [a,b] durch* $\cup_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$ *ersetzt wird, wobei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_j \leq b_j$ *für alle* $j \in \{1, ..., n\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:
(i) $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$
(ii)$\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$;
(iii) $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ (dh sin und cos sind 2π-*periodisch*).
(iv) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; (v) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Nullstellen von sin und cos:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin(k\pi) = 0$.

Arcuscosinus Die Funktion $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton fallend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arccos* : $[-1,1] \to [0,\pi]$ und sie heißt Arcuscosinus.
Arcussinus Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arcsin* : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und sie heißt Arcussinus.
Tangens Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens*. (Beachte, dass die Menge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ genau die Nullstellen des Cosinus enthält.)
Arcustangens $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv und ebenso ihre Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ und sie heißt *Arcustangens*.

Anwendung (Polarkoordinaten) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0,\infty)$ und genau einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\phi}$. Dabei heißt $r = |z|$ *Länge von* z und $\phi =: \arg z$ heißt das *Argument von* z.

Wie wird $\arg z$ **bestimmt?** Wenn z=a+bi, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z \neq 0$, dann $\phi = \arctan(b/a)$ für $a > 0$, $\phi = sgn(b)\pi/2$ für $a = 0$ ($sgn(b) = \frac{b}{|b|}$), sowie $\phi = \pi + \arctan(b/a)$ für $a < 0$, $b \geq 0$, und $\phi = -\pi + \arctan(b/a)$ für $a, b < 0$.

10 Differentialrechnung

10.1 Differentiarbarkeit

Im Rest des Kapitels ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall [3].

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

Definition 10.1. *f heißt in $x_0 \in I$* differenzierbar *(**dbar**), falls der Limes $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert in $\mathbb{R}$. Dieser Grenzwert heißt* die Ableitung von f in x_0. *Bezeichnung: $f'(x_0)$.*

Die Funktion f heißt auf I differenzierbar, *falls f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist.*

Bemerkung 10.1. *Es ist $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.*

Satz 10.1. *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

10.2 Ableitungsregeln

Satz 10.2 (Abbleitungsregeln). *(a) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in I$ differenzierbar sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \text{Produktregel.}$$

(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J := I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Die Funktion $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{Quotientenregel.}$$

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$. Sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad \text{Kettenregel.}$$

[3] Aber kein Intervall der Form [a,a]={a}.

Satz 10.3 (Satz über die Umkehrfunktion). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Definition 10.2. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein* lokales Maximum *[bzw.* Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ gilt } f(x) \leq f(x_0) \quad [\text{ bzw. } f(x) \geq f(x_0)].$$

Ein relatives *oder* lokales Extremum *ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum* [4]*.*

Bemerkung 10.2. *Ein Extremum (Maximum oder Minimum) einer Funktion, ist auch ein lokales Extremum der Funktion.*

Satz 10.4. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Korollar 10.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn f differentierbar ist auf (a, b), dann*

$$\max f := \max f([a, b]) = \max f(\{a, b\} \cup A)$$

$$\min f := \min f([a, b]) = \min f(\{a, b\} \cup A),$$

wobei $A = \{x \in (a, b) \text{ mit } f'(x) = 0\}$.

10.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 10.5. *Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)* *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Folgerungen Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.

(1) f ist auf I konstant $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ auf I.

(2) Ist $f' = g'$ auf I, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.

(3) Ist $f' \geq 0$ [bzw. $f' \leq 0$, $f' > 0$, $f' < 0$] auf I, so ist f auf I monoton wachsend [bzw. monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend].

[4] In dieser Definition kann I ersetzt werden durch eine Menge die kein Intervall ist.

10.4 Höhere Ableitungen und Taylorsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (**dbar**).

Definition 10.3. *(a) f heißt in $x_0 \in I$* zweimal differenzierbar*, falls f' in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt*

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die 2. Ableitung von f in x_0*.*

f heißt auf I zweimal differenzierbar*, falls f' auf I differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')'$* zweite Ableitung von f auf I*.*

Entsprechend definiert man im Falle der Existenz $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ etc. bzw. f''', $f^{(4)}$, ...

Definition 10.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt* auf I n-mal stetig differenzierbar*, falls f auf I n-mal differenzierbar ist und $f, f', f'', \dots, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Dafür schreiben wir $f \in C^n(I)$.*

Außerdem: $f \in C^0(I) = C(I)$, falls f auf I stetig ist, und $f \in C^\infty(I)$, falls $f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dh wenn f auf I beliebig oft differenzierbar ist.

Bemerkung 10.3. *Wenn eine Funktion differentierbar ist, dann ist die Abbleitung nicht unbedingt eine stetige Funktion.*

Satz 10.6 (Satz von Taylor)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I differentierbar. Seien $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{n\text{-tes Taylorpolynom } T_n(f;x_0)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{n\text{-tes Restglied } R_n(f,x_0)(x)} . \end{aligned}$$

Definition 10.5. *Falls $f \in C^\infty(I)$, heißt die Potenzrreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ Taylorreihe der Funktion f.*

Korollar 10.2. *Sei $f \in C^\infty(I)$, und $x_0 \in I$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f; x_0)(x) \to f(x) \quad \forall x \in I \qquad \left(\text{d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x) \quad \forall x \in I \right),$$

genau dann wenn $R_n(f, x_0)(x) \to 0$ für jedes $x \in I$

Wenn die Aussagen des Korollars gelten, ist die Funktion durch ihre Taylorreihe darstellbar.

Satz 10.7 (Folgerung des Taylorsatzes). *Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$ mit x_0 kein Randpunkt von I. Weiter sei*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ [bzw. $f^{(n)}(x_0) < 0$], so hat f in x_0 ein lokales Minimum [bzw. ein lokales Maximum].

(b) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.

Bemerkung 10.4. *Allgemeiner sei $f \in C^2(I)$ mit $f'' \geq 0$ auf I [bzw. mit $f'' \leq 0$ auf I]. Solche Funktionen heißen* konvex *[bzw.* konkav*]. Es gilt dann:*

> Ist $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein globales Minimum [bzw. ein globales Maximum].

10.5 Die Regeln von de l'Hospital

Satz 10.8 (10.11 **Die Regeln von de l'Hospital**). *Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter sei $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.*

(a) Ist $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = 0$, so gilt

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(b) Ist $\lim_{x \to b} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$, so gilt

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Bemerkung 10.5. *Ähnliche Aussage gilt, wenn man (a, b) durch (b, a) ersetzt. In diesem Fall kann $b = -\infty$ anstatt $b = \infty$ betrachtet werden.*

Satz 10.9. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ und*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Dann ist f auf I differentierbar, und für jedes $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Insbesondere ist f stetig in I.

10.6 Ableitung von Potenzreihen

Satz 10.10 (Ableitung von Potenzreihen)**.** *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in (0,\infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ *und*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Dann ist f *auf* I *differentierbar (insbesondere stetig), und*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I.$$

11 Integration

Im Rest der Vorlesung sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. das Bild $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ von f ist beschränkt.

11.1 Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral

Definition 11.1. $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *heißt eine Zerlegung von* $[a,b]$, *falls* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ setze

$$I_j \;:=\; [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j).$$

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \left[S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \right]$ heißt Untersumme [Obersumme] von f bzgl. Z

Sei $m := \inf f([a,b])$ und $M := \sup f([a,b])$.

Satz 11.1. *Seien* Z_1, Z_2 *Zerlegungen.*

(1) Es gilt $m(b-a) \le s_f(Z_1) \le S_f(Z_2) \le M(b-a)$.

(2) Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, *so gilt* $s_f(Z_1) \le s_f(Z_2) \le S_f(Z_2) \le S_f(Z_1)$.

Definition 11.2. $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$(*unteres Integral von* f *über* $[a,b]$)
$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$(*oberes Integral von* f *über* $[a,b]$).

Es gilt $m(b-a) \le s_f \le S_f \le M(b-a)$.

11.2 Riemann Integrierbarkeit, Riemann Integral

Definition 11.3 (11.2)**.** *f heißt* (Riemann-)integrierbar *(*ib*)(, falls $s_f = S_f$ gilt.*
In diesen Falle heißt

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := S_f (= s_f)$$

das (Riemann-)Integral *von f über $[a, b]$.*

Definition 11.4. $R[a, b] := \{g : [a, b] \to \mathbb{R} : g$ *beschränkt und integrierbar*$\}$

Für eine Zerlegung Z, definieren wir

$$\|Z\| := \max\{|I_j| : j = 1, 2, \ldots, n\} \text{ (Feinheit von } Z\text{)}.$$

Ein n-Tupel $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ heißt passender Zwischenvektor, wenn $\xi_j \in I_j$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt. Für einen solchen ξ heißt

$$\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine Riemannsche Summe . Wegen $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$ gilt dabei $s_f(Z) \leq \sigma_f(Z, \xi) \leq S_f(Z)$.

Satz 11.2 (11.7)**.** *Sei $f \in R[a, b]$ und $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit $\|Z_l\| \to 0$, sowie $(\xi^{(l)})$ eine Folge von passenden Zwischenvektoren. Dann gilt*

$$\lim_{l\to\infty} \sigma_f(Z_l, \xi^{(l)}) = \int_a^b f\,dx.$$

Bemerkung 11.1. *Der Satz beschreibt wie ein Integral approximiert werden kann (z.B. mit Computer). Das ist nützlich, wenn es unmöglich ist das Integral explizit zu berechnen.*

11.3 Eigenschaften des Riemann Integrals

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$ dann $f \in R[a, b]$ und $\int_a^b f\,dx = c(b - a)$.
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar, d.h. $f \in R[a, b]$.

Seien $f, g \in R[a, b]$. Dann

(1) Gilt $f \leq g$ auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.

(2) $fg \in R[a, b]$ und für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

(3) $|f| \in R[a,b]$ und $\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$ (Dreiecksungleichung für Integrale).

(4) Wenn $a < c < b$ dann $f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$ und $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.
Im Rest des Kapitels ist I ein Intervall.

Definition 11.5. *Sind $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei F auf I differenzierbar ist mit $F' = f$ auf I, so heißt F eine* Stammfunktion von f auf I.

11.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Partielle Integration, Integration durch Substitution

Satz 11.3 (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
(1) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ ist eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$.
(2) Ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \ \left(=: G(x)\Big|_a^b =: [G(x)]_a^b \right).$$

Für eine Stammfunktion von f schreibt man auch $\int f(x)dx$ (unbestimmtes Integral) .

Satz 11.4 (**Partielle Integration**). *Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt*

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \quad \text{auf } I.$$

Ist $I = [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Satz 11.5 (**Integration durch Substitution**). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $u \in C^1(I)$ mit $u(I) \subseteq I$. Ist F eine Stammfunktion von f dann gilt*

(i) $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du = F(u(b)) - F(u(a))$.

12 Uneigentliche Integrale

In dieser Vorlesung:
(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sei f über jedes Intervall

$[a,b] \subseteq I$ integrierbar.
(2) Es seien stets $a,b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\alpha < b$ und $a < \beta$.

13.4 **Konvergenz uneigentlicher Integrale** Sei $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$ (bzw. $(\alpha, b] \to \mathbb{R}$) eine Funktion. Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)\,dx$ (bzw. $\int_\alpha^b f(x)\,dx$) heißt konvergent, falls der Limes $\lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx$ (bzw. $\lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx$) existiert und reell ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx \quad \Big(\text{bzw.} \quad \int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx\Big).$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

Definition 12.1. *Sei $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das* uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *heißt konvergent, falls es ein $c \in (\alpha,\beta)$ so gibt, dass die uneigentlichen Integrale $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\beta f(x)\,dx$* ***beide*** *konvergent sind. In diesem Fall setzt man*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx,$$

und die Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha,\beta)$.

Das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt divergent, falls $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ nicht konvergent ist.

Definition 12.2 (Absolut konvergente uneigentliche Integrale)**.** *Ein uneigentliches Integral $\int_I f(x)\,dx$ (Integral über das Intervall I) heißt absolut konvergent, falls $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent ist.*

Satz 12.1. *(1) Ist $\int_I f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ konvergent und*

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx.$$

(2) ***Majorantenkriterium:*** *Ist $|f| \leq g$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ konvergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ absolut konvergent.*
(3) ***Minorantenkriterium:*** *Ist $f \geq g \geq 0$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ divergent.*

Index