Erinnerung: Teilfolge (TF) $(a_{k(n)})$ von (a_n).

(i) Hat manche Terme von (a_n).

(ii) Index muss steigen.

z.B $(a_{3n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (a_2, a_5, a_8, a_{11}, \dots)$

ist TF von (a_n)

$(a_5, a_2, a_8, a_{11}, \dots)$ keine TF von (a_n) (a_5 taucht vor a_2 auf.

$\rightsquigarrow$ Index steigt nicht).

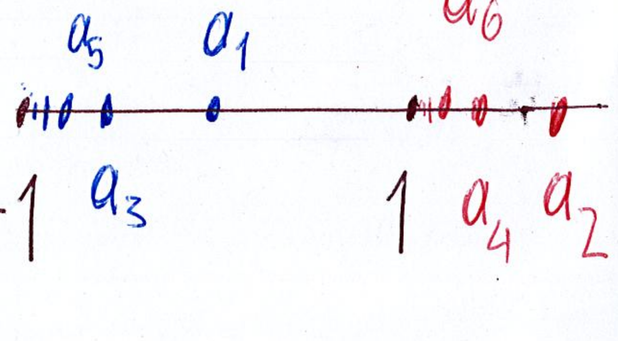
$a \in \mathbb{R}$ (heißt) Häufungswert (HW) von (a_n)

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ (TF) $(a_{k(n)})$ von a_n mit

Bsp 6.5.2 ist $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ dann

$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \longrightarrow 1$

$a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1} \longrightarrow -1$



Also sind $1, -1$ HWe von a_n.
(a_n) hat keine andere HWe,
weil die TF a_{2n}, a_{2n-1} konvergent
sind und die ganze Folge abdecken
(d.h. $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$).

Satz 6.2 (Bolzano Weierstrass).
Jede beschränkte reelle Folge
(a_n) hat eine Konvergente (TF).
Beweisidee: Man zeigt, dass a_n
eine monotone (TF) hat. Sie ist
aber auch beschränkt also nach
Satz 6.1 konvergent.

6.6 Rechnen mit ∞: Sei (a_n) reelle Folge.

$$a_n \to \infty \iff \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K$$

Intuition: a_n wird beliebig groß wenn n groß wird.

$$a_n \to -\infty \iff -a_n \to \infty.$$

Konventionen: $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.

Außerdem

$a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$.

$a > 0 \Rightarrow a \cdot \infty = \infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$

$a < 0 \Rightarrow a \cdot \infty = -\infty$, $a(-\infty) = \infty$.

$\frac{1}{\infty} = 0$

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\infty(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = \infty$.

Bem: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0(-\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert.

Regeln: Sind $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$ wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. dann.

$a_n + b_n \to a+b$ falls $a+b$ definiert ist.
$[a_n b_n \to a \cdot b]$ $\quad$ $[ab]$

Bsp 6.6.1 $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{n^2+n} + n] = \infty$, weil $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} = \infty$ und $\infty + \infty = \infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{n^2+n} - n]$ kann nicht mit diesen Regeln berechnet werden, denn $\infty - \infty$ ist nicht definiert. Allerdings.

$\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{n^2+n} - n] = \frac{1}{2}$ (Bsp. 6.2.1).

6.7 Limes superior / Limes inferior

Sei (a_n) reelle Folge und

$A = \{ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \exists$ TF $(a_{k(n)})$ mit $a_{k(n)} \to a \}$.

<u>Bem</u>: $A \neq \emptyset$ denn wenn $-\infty, \infty \notin A$ dann ist (a_n) beschränkt $\overset{\text{Satz 6.2}}{\Longrightarrow}$ (a_n) hat konvergente TF $a_{k(n)}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_{k(n)} \in A$.

Satz: A hat immer ein Minimum und ein Maximum (wobei, wenn z.B $\infty \in A$ dann $\max A = \infty$).

<u>Def 6.3</u> $\liminf a_n := \min A = \underline{\lim}\, a_n$.

$\limsup a_n := \max A = \overline{\lim}\, a_n$.

Bem 6.7.1 Ist (a_n) beschränkt dann

$A = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist HW von } (a_n)\}$.

Also ist $\liminf a_n$ [$\limsup a_n$]

der kleinste [größte] HW von (a_n).

Bsp 6.7.1 $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschränkt

$\xrightarrow[\text{Bsp 6.5.2}]{\text{Bem 6.7.1}}$ $A = \{-1, 1\}$. Also

$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1$.

Bsp 6.7.2 (1) $b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. dann

$\boxed{b_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ b_2 = \cos(\pi) = -1,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1,}$ (1).

und $b_{n+4} = \cos\left(\frac{(n+4)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = b_n$ (2)

Folgt aus (1),(2) (i) $b_{2n-1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (3)

$(b_1, b_3, b_5, \dots)$ 0.

(ii) $b_{4n-2} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $b_{4n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (4)

$(b_2, b_6, b_{10}, \dots)$. $(b_4, b_8, b_{10}, \dots)$.

Da diese Drei TF die ganze Folge abdecken und $b_{2n-1} \to 0$, $b_{4n} \to 1$ und $b_{4n-2} \to -1$ gilt.

$A = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow$ $\liminf b_n = -1$

$\limsup b_n = 1$.

(-1 kleinster HW, 1 größter HW).

(2) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) n = n b_n$. Dann mit Hilfe von (3), (4) folgt.

$a_{2n-1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $a_{4n-2} = -(4n-2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$a_{4n} = 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Da diese TF die ganze Folge abdecken und

$a_{2n-1} \to 0$, $a_{4n-2} \to -\infty$, $a_{4n} = \infty$.

gilt. Also $A = \{-\infty, 0, \infty\}$.

deshalb $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

a_n hat nur einen HW und zwar 0.

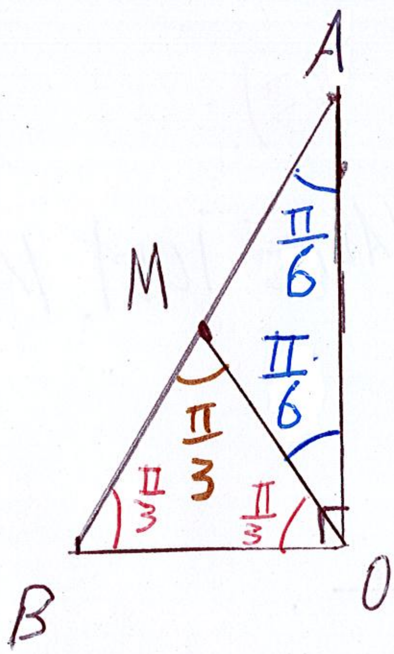
Bem 6.6 Sei (a_n) eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann

$$a_n \to a \iff A = \{a\} \iff \boxed{\liminf a_n = \limsup a_n = a}$$

$$\iff \left(\boxed{a_{k(n)} \to a \quad \forall \text{ TF } (a_{k(n)}) \text{ von } (a_n)} \right).$$

Ergänzung

Herleitung von $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



OAB: Rechtwinkliges Dreieck der Skizze

Sei M in AB, so dass $\widehat{BOM}=\frac{\pi}{3}$.

(1) Zeigen Sie $|OM|=|MA|$ (1)

(2) Zeigen Sie $|OM|=|MB|=|OB|$ (2).

(3) Leiten Sie $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ her.

(1) $\widehat{BOM}+\widehat{MOA}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{MOA}=\frac{\pi}{6}$

$\widehat{OAB}+\widehat{ABO}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{OAB}=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ (1)

(2). $\widehat{BMO}=\frac{\pi}{3}$. Da die Summe der Winkel eines Dreiecks π ist. $\Rightarrow$ OMB gleichseitiges Dreieck

$\Rightarrow$ (2).

(3) (1),(2) $\Rightarrow$ $|AB| = 2|OB|$ (3).

Also $|OA| \underset{\downarrow}{=} \sqrt{|AB|^2 - |OB|^2} \overset{(3)}{=} \sqrt{3}\,|OB|$. (4)

Pythagoras.

Also $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|OB|}{|AB|} \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{|OA|}{|AB|} \overset{(3),(4)}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bemerkung zu komplexen Zahlen

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann

$\exists \; \varphi, \theta \in [0, 2\pi]$ mit

$$z_1 = |z_1| e^{i\varphi}, \quad z_2 = |z_2| e^{i\theta}$$

Also:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \, e^{i(\varphi+\theta)}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi-\theta)}.$$

Also: Multiplikation mit z_2 multipliziert den Betrag einer komplexen Zahl mit $|z_2|$ und rotiert die Zahl nach θ. Die Division hat ähnliche Interpretation.