7 Reihen

Sei (a_n) eine Folge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = ?$

Def 7.1 $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \dots + a_N$, $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ heißt Reihe.

N-te Partialsumme

Bezeichnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $:\Longleftrightarrow$ (s_N) konvergent

nach Definition

genau dann wenn.

In diesem Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} s_N$.

Bsp 7.1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10^n} = ?$

$$s_N = 9 \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{10^n} \overset{\text{Blatt 3 (4a)}}{=\!=\!=} 9 \, \frac{1 - \frac{1}{10^{N+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = 10\left(1 - 10^{-(N+1)}\right).$$

Also $\lim_{N\to\infty} s_N = 10 \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 10. \quad (\text{Also } 9{,}\overline{9} = 10)!$$

<u>Bsp 7.1.2</u> Die <u>geometrische Reihe</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$ ist konv $\Leftrightarrow |z| < 1$

In diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

(<u>Bem</u>: Es gibt auch komplexe Folgen. (a_n) (also $a_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Mit Hilfe des Betrags kann man die Konvergenz gleich wie in <u>Def. 6.1</u> definieren. Ist $a \in \mathbb{C}$. Dann $a_n \to a \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_n = a$ und $\operatorname{Im} a_n = a$.)

<u>Beweis</u>: Ist $|z| < 1$ dann da

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z}. \quad (\text{Übungsblatt 3 4a}). \quad (1)$$

Aber $|z^{N+1}| = |z|^{N+1} \longrightarrow 0$ (2)

da $|z|<1$.

$|xy| = |x||y|$ Also

$|z^2| = |z|^2$. und mit Induktion

$$\forall N \quad |z^{N+1}| = |z|^{N+1}$$

(1), (2) $\quad s_N \to \frac{1}{1-z}$. Also $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Ist $|z| \geq 1$. Dann ist

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ divergent. Wäre sie konvergent

dann $s_N \to a$ für ein $a \in \mathbb{C}$.

Also $s_{N+1} \to a$

$\Rightarrow \quad s_{N+1} - s_N = z^{N+1}$. Also $z^{N+1} \to 0$

$\Rightarrow |z^{N+1}| = |z|^{N+1} \to 0$ was

$|z| \geq 1$ widerspricht.

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$\forall N \in \mathbb{N}$ ist $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Also $s_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$s_{2N} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}}_{s_N} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\geq \frac{1}{2N}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2N}}_{\geq \frac{1}{2N}}}_{N \text{ Terme alle } \geq \frac{1}{2N}}$$

Also $s_{2N} \geq s_N + N \frac{1}{2N} = s_N + \frac{1}{2}$.

Annahme $s_N \to a \in \mathbb{R}$. Dann

$s_{2N} \to a$ (TF von s_N). Also

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{s_{2N}} \geq \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{s_N} + \frac{1}{2} \Rightarrow a \geq a + \frac{1}{2}.$$

Widerspruch. Also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

Satz 7.1 Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen und $s_N := a_1 + \dots + a_N$, $N \in \mathbb{N}$.

(1) $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, und (s_N) beschränkt $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(2)-(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. und $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ konv

und $$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{p} a_n.$$

Ferner $$\lim_{N\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right)}_{\text{Reihenendstück.}} = 0$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n \to 0$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $c, d \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n + d b_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis von: (1) (s_N) ist beschränkt und monoton wachsend $[s_{N+1} = s_N + a_{N+1} \geq s_N]$ also nach Satz 6.1 konvergent.

(4). Ist $s_N \to a \in \mathbb{R}$. Dann $s_{N+1} \to a$

Also
$$\underbrace{s_{N+1} - s_N}_{= a_{N+1}} \to 0 \Rightarrow a_{N+1} \to 0.$$

Bsp 7.1.3 (Klausur H 2015) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{a_n}$$

$$|a_n| = \left|1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right| \geq \left|1 - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$$

da $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$.

Also $|a_n| \not\to 0$ deshalb $a_n \not\to 0$ also nach Satz 7.1 (4) ist die Reihe divergent.

Bsp 7.1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert da.

$$s_N = \frac{1}{0!} + \underset{\le \frac{1}{2^0}}{\frac{1}{1!}} + \underset{\le \frac{1}{2^1}}{\frac{1}{2!}} + \underset{\le \frac{1}{2^2}}{\frac{1}{3!}} + \underset{\le \frac{1}{2^3}}{\frac{1}{4!}} + \ldots + \underset{\le \frac{1}{2^{N-1}}}{\frac{1}{N!}}$$

$$\le 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \le 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{\text{Bsp 7.1.2}}{=}$$

$$= 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Also $s_N \le 3$ und $\frac{1}{n!} \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Deshalb nach Satz 7.1 (1)

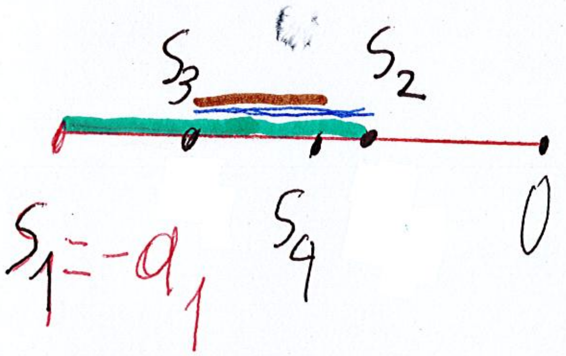
konvergiert die Reihe. (Bem $s_N \to e$).

Konvergenzkriterien 7.4

7.4 Leibnizkriterium: Sei (a_n) reelle Folge $a_n \to 0$, $a_n \geq 0$, a_n monoton fallend.

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n}_{\text{alternierende Reihe}} \text{ konvergent.}$$

(wenn $a_n \to 0$, $a_n \geq 0$, a_n monoton fallend).

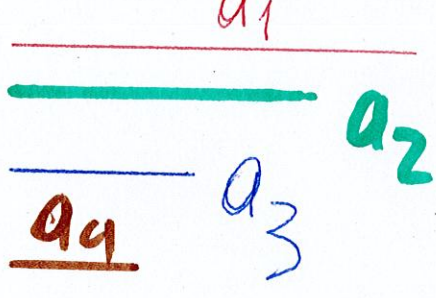


$s_1 = -a_1$

$s_2 = -a_1 + a_2$

$s_3 = -a_1 + a_2 - a_3$

$s_4 = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4$



$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0 \Rightarrow s_N$ oszilliert

a_n monoton fallend $\Rightarrow$ Oszilationen werden immer kleiner.

$a_n \to 0 \Rightarrow$ Oszilationen verschwinden wenn $n \to \infty$

Bsp 7.4.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert nach Leibnitzkriterium, da $\frac{1}{n} \geq 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ und $\frac{1}{n}$ monoton fallend.

7.2 Absolut konvergente Reihen.

Def $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent

$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Satz 7.2 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

und $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(Folgerung der Dreiecksungleichung).

Bsp 7.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist konvergent (Bsp 7.4.1) aber nicht absolut konvergent, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (harmonische Reihe).

7.3 Majoranten / Minoranten / Kriterium: $(a_n), (b_n)$ Folgen $n_0 \in \mathbb{N}$.

(1) Ist $|a_n| \leq b_n \; \forall n \geq n_0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

In einfachen Worten: Ist eine Reihe mit größeren Termen konvergent so ist eine mit kleineren Termen auch konvergent. (Majorantenkriterium)

(2) Ist $a_n \geq b_n \geq 0 \; \forall n \geq n_0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

In einfachen Worten: Ist eine Reihe mit kleineren Terme divergent so ist eine mit großeren Termen auch divergent. (Minorantenkriterium).