Bsp 7.3.1 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent.

denn $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$ (*).

Also $\lim_{N\to\infty} s_N = 1$ also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(*) kann mit Induktion gezeigt werden.

Für $N=1$ $\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$

Annahme (*) stimmt für ein $N \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest) z.z $\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+2}$.

In der Tat $\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)}$.

$$\overset{(*)}{=} 1 - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} = 1 - \frac{N+2}{(N+1)(N+2)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)}$$

$$= 1 - \frac{N+1}{(N+1)(N+2)} = 1 - \frac{1}{N+2}$$ was zu zeigen war. Also stimmt (*) $\forall N \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist $q \geq 2$ so ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergent.

Denn $\left|\frac{1}{n^q}\right| = \frac{1}{n^q} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$. (1)

$\left(\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \overset{n^2(n+1)>0}{\Longleftrightarrow} \frac{n^2(n+1)}{n^2} \leq \frac{2n^2(n+1)}{n(n+1)} \Leftrightarrow n+1 \leq 2n \right.$

$\Leftrightarrow 1 \leq n$ was wahr ist also ist $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n+1}$ wahr$\Big)$.

Aber wegen (i) ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ konvergent

Also nach (1) und Majorantenkriterium

ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergent.

<u>Bsp 7.3.2</u> (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ ist divergent,

denn $\frac{1}{n^{3/5}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist

divergent (harmonische Reihe) Also nach

Minorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ divergent.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\qquad b_n = \frac{n^2}{\sqrt[10]{n^{26} + \underbrace{10n^{24}}_{\leq 10n^{26}} + \underbrace{21n^{10}}_{\leq 10n^{26}}}}$

Also $b_n \ge \dfrac{n^2}{\sqrt[10]{n^{26}+10n^{26}+21n^{26}}} = \dfrac{n^2}{\sqrt[10]{32\, n^{26}}}$

$= \dfrac{n^2}{\sqrt[10]{32}\; n^{2.6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\; n^{3/5}} \Rightarrow b_n \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}\; n^{3/5}} \ge 0.$

Also nach (i) und Minorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

<u>7.5 Wurzelkriterium</u>: Sei (a_n) Folge und $c := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(1) $c < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) $c > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweisidee: von (2) $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \limsup |a_n| = 1$.

$\Rightarrow a_n \not\to 0 \xRightarrow{\boxed{\text{Satz 7.1 (4)}}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis von (1) unter der Annahme $\sqrt[n]{|a_n|} \le c$:

$\Rightarrow |a_n| \le c^n$. Aber $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ konvergiert da $|c| = c < 1$ geometrische Reihe. Also ist nach Majorantenkriterium $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent. ~~(Für $c=1$ liefert das~~

Bem: Für $c=1$ liefert das Kriterium keine Entscheidung.

Bsp 7.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{1000}}}_{=:a_n}$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1+(-1)^n+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n^{1000}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1000}}\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)$$

Da aber $\sqrt[n]{n} \to 1$ (6.4 Bsp (2)) bekommen wir

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{1^{1000}} \limsup\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \underbrace{\limsup\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)}_{=1 \text{ (Bsp 6.7.1)}} = 2 > 1.$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht.

7.6 Quotientenkriterium: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und a_n eine Folge mit $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$. Sei $c_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $n \geq n_0$.

(1) $b := \limsup c_n < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

(2) $\liminf c_n > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

<u>Intuition von (1)</u>: Die ein bisschen stärkere Annahme $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq b \ \forall n \in \mathbb{N}$.

gibt $|a_{n+1}| \leq b|a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$

Also $|a_{n+1}| \leq b^n |a_1|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ konvergiert, da $|b| = b < 1$.

(2) Die verwandte Annahme

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $a_1 \neq 0$ gibt

$|a_n| \geq |a_1| \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bsp 7.6.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$$

$\forall z \in \mathbb{C}$. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$.

Allerdings: gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ (!!!)