Erinnerung: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$.

7.7 Die Eulersche Zahl ist $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Satz 7.3 Es gilt $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Beweis: $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{\leq n^k}}{k!} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$$

Also $\limsup a_n \leq e$. (1)

Andererseits, für $n \geq m$.

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

Also $\liminf a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \liminf a_n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$. (2). (1),(2) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e$.

7.9 Die Exponentialfunktion

Die Abbildung $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt **komplexe Exponentialfunktion**

Eigenschaften von $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(1) $E(0) = 1$, $E(1) = e$.

(2) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $E(z)E(w) = E(z+w)$.

(3) $\forall z \in \mathbb{C}$ (i) $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$.

(ii) $E(nz) = (E(z))^n$.

(4) $\forall x > 0$ gilt $E(x) > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) > 0$.

(5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

(12) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\Big| \underbrace{E(z)}_{\text{Echter Wert (vom Computer nicht berechnenbar)}} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{n!} \Big| \leq \underbrace{\frac{|z|^N}{N!} E(|z|)}_{\text{Wenn klein, ist der Fehler der Approximation klein!}} \quad (1)$$

Echter Wert (vom Computer nicht berechnenbar)

Approximation (vom Computer berechenbar)

Wenn klein, ist der Fehler der Approximation klein!

Partieller Beweis: (1) $E(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Also $E(0) = 1$, $E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Nach Definition.

(3)-(5) Folgen leicht aus (2)

z.B (2) => (3)(i) weil

$$E(z)E(-z) = E(z+(-z)) = E(0) \overset{(1)}{=} 1.$$ Also

$$E(z) \neq 0 \quad \text{und} \quad E(z)^{-1} = E(-z).$$

Beweisidee von (2): Es gilt.

$$E(z)E(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}}_{\text{Terme mit gesamter Potenz } n} \quad (*)$$

Mit Worten: Wenn wir die linke Seite "ausmultilpizieren" dann jedes Produkt hat gesamte Potenz $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die Rechte Seite sortiert die Terme nach gesamter Potenz.

Illustration von (*).

$$\left(\frac{1}{0!}+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\left(\frac{1}{0!}+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\dots\right)$$

$\frac{1}{0!}\frac{1}{0!}=1$ Terme gesamter Potenz 0.

$\frac{1}{0!}\frac{w}{1!}+\frac{z}{1!}\frac{1}{0!}=w+z$ Terme gesamter Potenz 1.

$$\underbrace{\frac{1!}{0!}\frac{w^2}{2!}+\frac{z}{1!}\frac{w}{1!}+\frac{z^2}{2!}\frac{1!}{0}}_{\text{Terme gesamter Potenz 2.}}=\frac{(z+w)^2}{2!}$$

Aber $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \overset{\text{Binomial}}{\underset{\text{satz}}{=}} \frac{1}{n!} (z+w)^n \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = E(z+w).$$

<u>Allgemein</u>: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Dann $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}_{\text{wie in } (**)},$$

heißt <u>Cauchy Produkt</u> von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis von (12).

$$\left|E(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{n!}\right| \le \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

Alle Terme ($n=0$ bis ∞)

Terme $n=0$ bis $N-1$

Terme $n=N$ bis ∞

Dreiecksungleichung

$$\underset{n=m+N}{\overset{m=n-N}{=}} \; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{m+N}}{(m+N)!} = |z|^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{(m+N)!}$$

m fängt von 0 da $m = n-N$ und n von N anfängt

ausgeklammert

$$\le |z|^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!\,N!} = \frac{|z|^N}{N!} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!}}_{E(|z|)} = \frac{|z|^N}{N!} E(|z|).$$

Da $(m+N)! \ge m!\,N!$

Andere wichtige Eigenschaften von $E(z) = e^z$

(7) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$.

(8) $\forall y \in \mathbb{R}$ gilt $|E(iy)| = 1$.

(9) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(\operatorname{Re} z)$.

Beweisideen: (7) $E(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{z})^n}{n!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\frac{z^n}{n!}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{E(z)}$.

(8) $|E(iy)|^2 = E(iy)\overline{E(iy)} \overset{(7)}{=} E(iy)E(-iy)$

$\overset{(2)}{=} E(iy - iy) = E(0) = 1$.

(9) Mit Bsp $|e^{3-6i}| = |e^3 e^{-6i}| =$

$|e^3||e^{-6i}| \overset{(8)}{=} e^3 = e^{\operatorname{Re}(3-6i)}$.