7.12 Sinus, Cosinus

Def: $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ (*), $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

Eigenschaften: (1) $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

denn $\sin 0 = \frac{1}{2i}\left(e^{0}-e^{0}\right) = 0$, $\cos 0 = \frac{e^{i0}+e^{i0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

(2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$ (1)

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$ (2)

Herleitung von (2): $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) \Rightarrow$

$\cos z = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(iz)^n}{n!} + \frac{(-iz)^n}{n!}\right)$ (3)

denn $(-1)^n = -1$.

n ungerade $\Rightarrow (iz)^n + (-iz)^n = (iz)^n - (iz)^n = 0$ (4)

n gerade $\Rightarrow (iz)^n + (-iz)^n = (iz)^n + (iz)^n = 2(iz)^n$ (5)

denn $(-1)^n = 1$.

(3), (4), (5) $\Rightarrow \cos z = \frac{1}{2}\sum_{n \text{ gerade}}\left(\frac{2(iz)^n}{n!}\right) \Rightarrow$

$$\cos z = \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} \overset{i^2=-1}{\Longrightarrow}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

(1) $\rightarrow$ Tutorium.

Da alle Koeffizienten in (1), (2) reell sind $\rightsquigarrow$ $\sin x, \cos x \in \mathbb{R} \;\forall x \in \mathbb{R}$ (6)

Da $i \sin x \overset{(*)}{=} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$

$\xRightarrow{\text{addieren}}$ $\boxed{\cos x + i \sin x = e^{ix}}$ (7) Eulersche Formel.

(6), (7) $\Longrightarrow$ $\boxed{\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}),\ \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) \;\forall x \in \mathbb{R}}$

Da aber $|e^{ix}| \overset{(8)}{=} 1$ $\rightarrow$ der letzter Vorlesung.

und $e^{ix} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$

$(z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.)$

bekommen wir $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w. \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \end{aligned}} \quad (8).$$

Bsp 7.12.1 $\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\overset{(8)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

7.13 Potenzreihen

$z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ Folge.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n} \longrightarrow \text{Potenzreihe } (z\in\mathbb{C} \text{ Variable}).$$

a_n: Koeffizienten. z_0: Entwicklungspunkt.

Bsp 7.13.1 (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-0)^n$ Exponentialreihe.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$, $a_n = 1$, $z_0 = -1$.

Konvergenz? Wurzelkriterium.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \frac{|z-z_0|}{R}, \quad \text{wobei } R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

R: Konvergenzradius

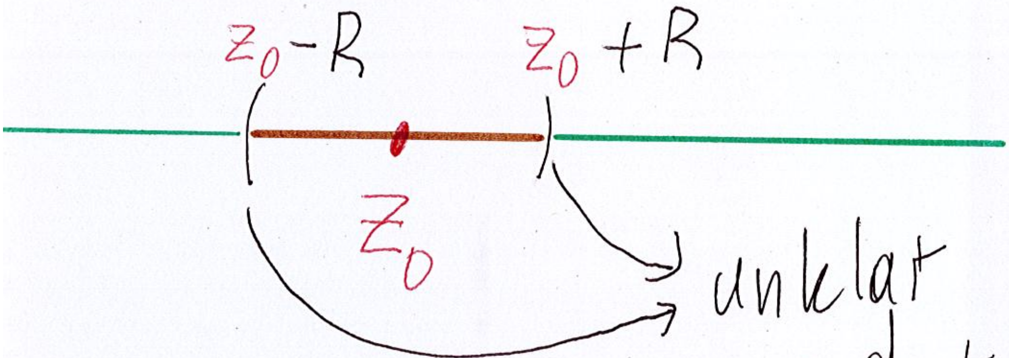
Also.

Satz 7.5 $\frac{|z-z_0|}{R} < 1 \quad (\iff |z-z_0| < R)$

dann Potenzreihe **absolut konvergent**.

$|z-z_0| > R \Rightarrow$ Potenzreihe **divergent**.

Illustration für reelle Potenzreihen.



unklar ob konvergent oder divergent.

Bsp 7.13.2 Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{-1+(-1)^n 3}{2} - \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} (z-(1+i)) \text{ konvergent?}$$

Lö: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{-1+(-1)^n 3}{2} - \frac{1}{n}\right)^n\right|}$

$$= \left| \frac{-1+(-1)^n 3}{2} + \frac{1}{n} \right| = \begin{cases} \left| \frac{-1-3}{2} + \frac{1}{n} \right| = 2 + \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ \left| \frac{-1+3}{2} + \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

und da $2+\frac{1}{n} \to 2$, $1+\frac{1}{n} \to 1$ gilt

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ (größter Häufungs-wert von $\sqrt[n]{|a_n|}$) $\Rightarrow$

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{2}.$$ Also

$|z-(1+i)| < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Potenzreihe konvergent.

$|z-(1+i)| > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Potenzreihe divergent.

wenn

$|z-(1+i)| = \frac{1}{2}$ (9) dann.

$$\underbrace{\left| \left(\frac{-1+(-1)^n 3}{2} + \frac{1}{n}\right)^n (z-(1+i))^n \right|}_{\text{Terme der Potenzreihe}} \overset{(9)}{=} \left| \frac{-1+(-1)^n 3}{2} + \frac{1}{n} \right|^n \frac{1}{2^n}$$

Da $|a|^n|b|^n = |ab|^n$ $\Longrightarrow$ $\left|\frac{-1+(-1)^n 3}{4} - \frac{1}{2n}\right|^n$

$$= \begin{cases} \left|\frac{-1-3}{4} - \frac{1}{2n}\right|^n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, & n \text{ ungerade.} \\ \left|\frac{-1+3}{4} - \frac{1}{2n}\right|^n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)^n, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

$\not\to 0$ da $\left|1+\frac{1}{2n}\right|^n \geq 1$.

Also ist die Potenzreihe divergent, wenn $|z-(1+i)| = \frac{1}{2}$.

Also Potenzreihe konvergent $\iff |z-(1+i)| < \frac{1}{2}$.

<u>Satz 7.6</u> Konvergenzradius R, über Quotienten.

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Potenzreihe. Gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \infty$, dann $R = \frac{1}{\alpha}$.

Bsp 7.13.3 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^n}{n!}}_{a_n} (z-i)^n$, $R = ?$.

Fakultät also meistens Quotienten geschickter

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{\text{Satz 7.3}} e.$$

Also $R = \frac{1}{e}$.

Achtung: $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, oder $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ geben nicht an, was der Konvergenzradius ist (Beispiel in der Übung).