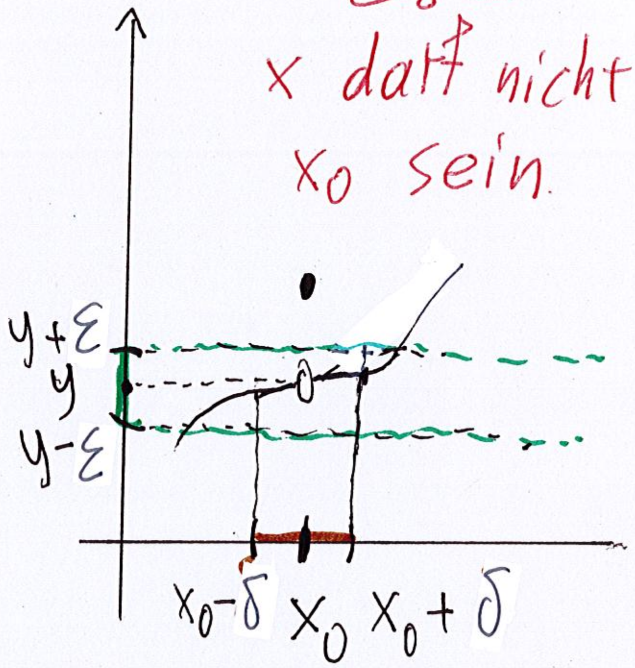
8 Stetigkeit

8.1 Limes, Stetigkeit, Kriterien

Def 8.1 Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0, y\in\mathbb{R}$. Wir sagen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y$, wenn $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ so dass

$$\underbrace{0<}_{x \text{ darf nicht } x_0 \text{ sein.}}|x-x_0|\underbrace{<\delta}_{x \text{ ist nah bei } x_0} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-y|<\varepsilon}_{f(x) \text{ ist nah bei } y.}$$



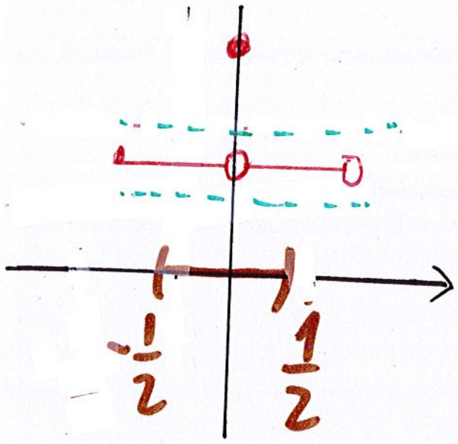
Oder

$$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$$

$$\Rightarrow f(x)\in(y-\varepsilon, y+\varepsilon).$$

Bem 8.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ kann auch für $f:D\to\mathbb{R}$ definiert werden $(D\subseteq\mathbb{R})$ wenn sinvoll.

Bsp 8.11 Sei $g: [-1,1) \to \mathbb{R}$ mit



$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } x = 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Denn wenn $\varepsilon > 0$, wählen wir $\delta = \frac{1}{2}$.

und $x \in \left(0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}\right) \setminus \{0\} \xRightarrow{x \neq 0} |g(x) - 1| = 0 < \varepsilon$.

Ähnlich $\underbrace{\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 1}$ Obwohl -1 am Anfang des Intervals ist

$\underbrace{\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1}$. Obwohl $1 \notin [-1,1)$.

Es ist nicht sinnvoll z.B. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ zu betrachten.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Def 8.2. } \text{Sei } f: D \to \mathbb{R} \text{ und } x_0 \in D. \\ f \text{ heißt } \underline{\text{stetig}} \text{ in } x_0\text{, wenn } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\end{array}}$$

<u>Bsp 8.1.2</u> g von Bsp 8.1.1 ist nicht stetig in 0 da $\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \neq 2 = g(0)$.

Aber $\lim_{x \to -1} g(x) = 1 = g(-1) \Rightarrow g$ stetig in -1.

Da $1 \notin [-1, 1)$ ist es nicht sinnvoll zu fragen, ob g stetig in 1 ist

---

$$\boxed{f: D \to \mathbb{R} \text{ heißt stetig} \Leftrightarrow f \text{ ist stetig in } x \ \forall x \in D}$$

<u>Satz 8.1</u> (i) Polynome, $\sin x$, e^x, x^p ($p \in \mathbb{R}$, $x > 0$), x^p, ($p \geq 0$, $x \geq 0$) sind stetig.

(ii) (f stetig in x_0) $\wedge$ (g stetig in $f(x_0)$) $\Rightarrow g \circ f$ stetig in x_0.

(iii) $\underbrace{f, g \text{ stetig in } x_0}$ $\Rightarrow f+g, f \cdot g$ stetig in x_0.

Wenn zusätzlich $g(x_0)$ dann $\frac{f}{g}$ ist stetig in x_0

Bsp 8.1.3 $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = (x^2+2x)\cos x$

Sind stetig als Produkt stetiger Funktion. Ebenso ist $f \circ g$ stetig.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2+2x)\cos x)$$

$$= e^{(x^2+2x)\cos x} \sin((x^2+2x)\cos x).$$

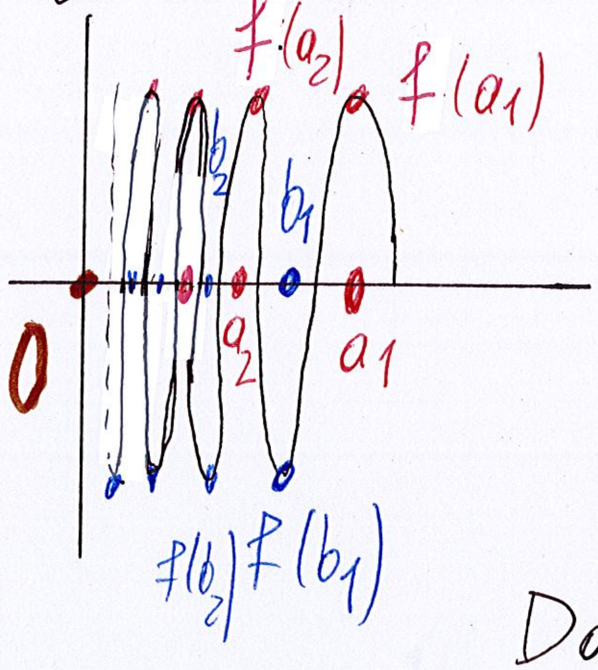
Satz 8.2 Sei $f: D \to \mathbb{R}$. dann

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \iff \lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$ Für alle Folgen in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

x_n darf nicht x_0. (da in Def 8.1 x nicht x_0 sein darf.

Bsp 8.1.5 $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x>0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ ist für

kein $a \in \mathbb{R}$ stetig.



Sei $a_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

$b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}$.

Dann $a_n \to 0$, $b_n \to 0$

Aber $f(a_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$ (1).

$f(b_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = -1 \to -1$ (2).

Wäre f stetig in 0 dann

gälte $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = a \overset{\text{Satz 8.2}}{\Longrightarrow}$

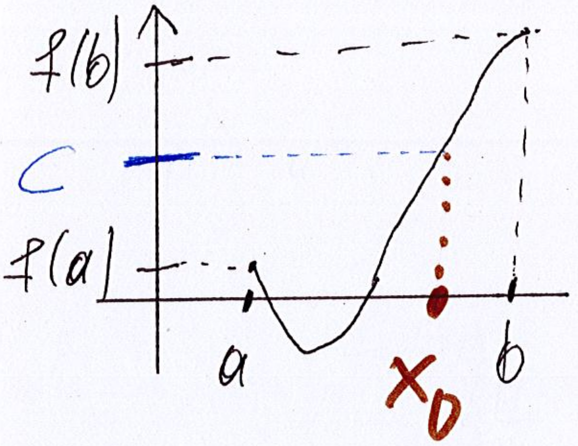
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = a$, und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = a$ was

(1), (2) widerspricht.

8.2 Zwischenwertsatz (Satz 8.3)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Ist (i) $f(a) < f(b)$ und $f(a) < c < f(b)$.
oder (ii) $f(a) > f(b)$ und $f(a) > c > f(b)$.

Dann $\exists$ $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = c$.



(Alle Werte zwischen $f(a)$, $f(b)$ werden angenommen).

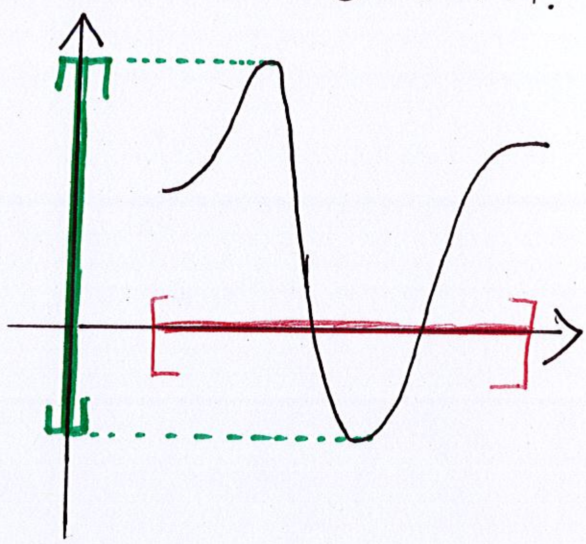
Bsp 8.2.1 $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ hat Nullstelle in $(1,2)$.

Lö: p ist Polynom also stetig.

Außerdem
$$\left.\begin{array}{l} p(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = -1 < 0 \\ p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 1 > 0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{wertsatz}]{\text{Zwischen}}$$

$\exists$ $x_0 \in (1,2)$ mit $p(x_0) = 0$

Folgerung: Sei I Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ auch Intervall.



Bsp 8.1.4 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{4(x-2)}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$$

stetig

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$ (2) für kein $a \in \mathbb{R}$.

(3) für $a=1$ (4) für $a=2$, (5) für $a=3$.

(6) keine der obigen Antworten

(7) keine Ahnung.