Die heutige Vorlesung enthält Einseitige Grenzwerte, monotone Funktionen Umkehrabbildungen von monotonen stetigen Funktionen, Logarithmus.

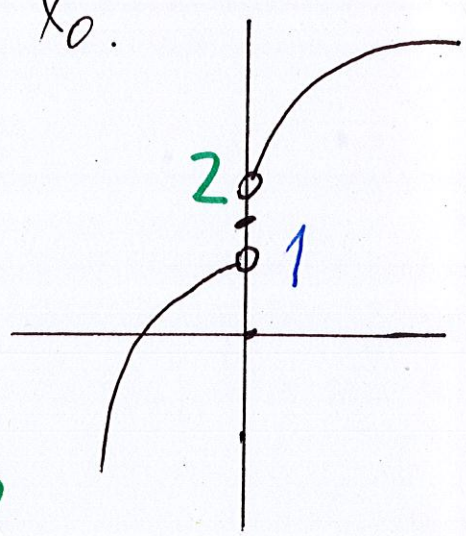
8.3 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0, y \in \mathbb{R}$

Def 8.3 $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = y$. [bzw $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = y$]

$\Leftrightarrow$ [$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, so dass

$\underbrace{x_0 < x < x_0 + \delta}_{\text{x ist nah bei } x_0 \text{ aber größer als } x_0}$ [bzw $\underbrace{x_0 - \delta < x < x_0}_{\text{x ist nah bei } x_0 \text{ aber kleiner als } x_0}$] $\Rightarrow \underbrace{|f(x) - y| < \varepsilon}_{f(x) \text{ ist nah bei } y}$]

Dann heißt y rechtseitiger [bzw. linksseitiger] Limes von f in x_0.



Bsp 8.3.1 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 1{,}5, & x = 0 \\ 2 + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

Dann $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 2 = \lim\limits_{x \to 0+} (2 + \sqrt{x}) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (1 - x^2) = 1$

$\boxed{\text{Satz 8.4}}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = y \iff \boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0+} f(x) = y \\ \text{und} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = y \end{array}}$

Wenn es sinnvoll ist beide zu bettachten.

Bsp 8.3.2 Sei $f: [-1{,}5, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (x-1+b)^2, & \text{wenn } x < 1 \\ b, & \text{wenn } x = 1 \\ -1+ax, & \text{wenn } x > 1. \end{cases}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ ist f stetig in 1?

Lösung f ist stetig in $1 \iff$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \overset{\text{Satz 8.4}}{\iff} \lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1).$$

Aber $f(1) = b$

$f(x) = (x-1+b)^2$ für $x < 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1-} f(x) = b^2$

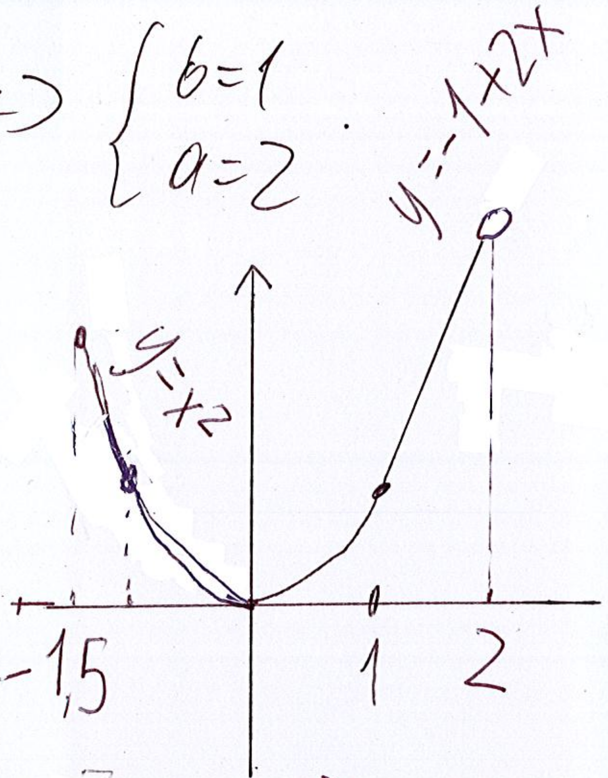
$f(x) = -1+ax$ für $x > 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1+} f(x) = -1+a$

Also f stetig in $1 \iff$

$$\begin{cases} b = b^2 \\ b = 1-a \end{cases} \overset{\text{Da}}{\underset{b>0}{\iff}} \begin{cases} b = 1 \\ b = 1-a \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

In diesem Fall

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -1+2x, & x > 1 \end{cases}$$



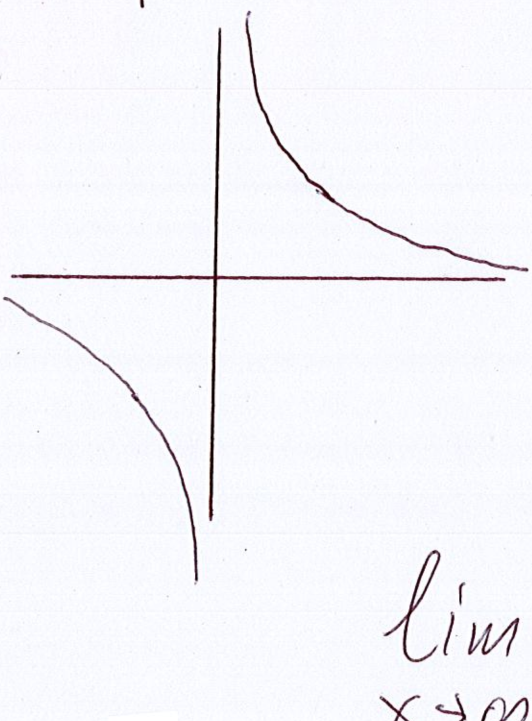
Bem: Da f in $[-1{,}5, 2]$ definiert ist ist es nicht sinnvoll $\lim_{x \to 2+} f(x)$ oder $\lim_{x \to -1{,}5-} f(x)$ zu betrachten. Da aber $\lim_{x \to 2-} f(x)$ $\lim_{x \to -1.5-} f(x)$ existieren gilt

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x)$$

$$\lim_{x \to -1.5} f(x) = \lim_{x \to -1.5+} f(x).$$

<u>Bem 8.3</u> Man kann $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ definieren mit $x_0, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = y$, mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Die Definitionen sind ähnlich wie im Fall von Folgen und die Intuition ist die gleiche.

Bsp 8.3.3 Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.



Dann $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty \text{ ist falsch!}}$

Bsp 8.3.4 $f: (1,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x \cdot \Big(\underbrace{\sqrt[3]{8-\tfrac{1}{x}}}_{a} \underbrace{-2}_{b}\Big). \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = ?$$

$$a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} \quad \left(\text{da } a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)\right)$$

Also $$\sqrt[3]{8-\frac{1}{x}} - 2 = \frac{\left(\sqrt[3]{8-\frac{1}{x}}\right)^3 - 2^3}{\left(\sqrt[3]{8-\frac{1}{x}}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8-\frac{1}{x}} + 2^2}$$

Also $$f(x) = \frac{x\left(8-\frac{1}{x}-2^3\right)}{\left(\sqrt[3]{8-\frac{1}{x}}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8-\frac{1}{x}} + 2^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2} = -\frac{1}{12}.$$

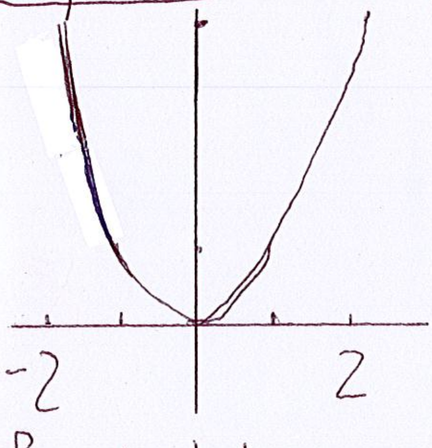
8.4 Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, und $f: D \to \mathbb{R}$

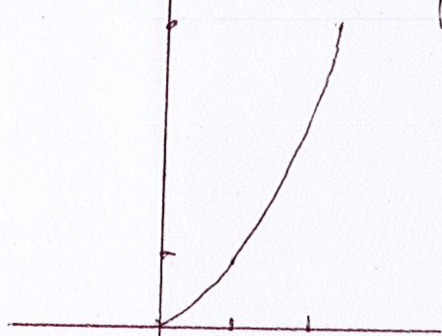
Wenn $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt	f heißt
$f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$	[streng] monoton wachsend
$f(x_1) \geq f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$	[streng] monoton fallend

$\Big\}$ [streng] monoton.

<u>Bsp 8.4.1</u>: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

$g: [0,2] \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$.

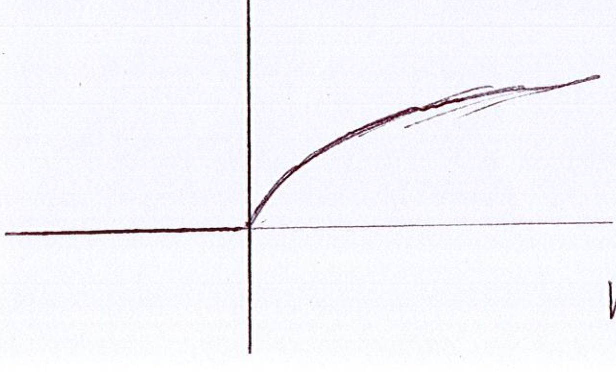




f nicht monoton.

g streng monoton wachsend.

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$



ist monoton wachsend aber nicht streng monoton wachsend.

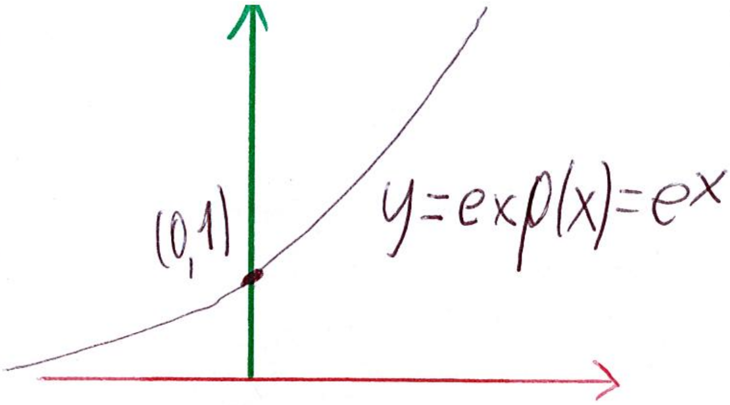
Satz 8.5 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [fallend].

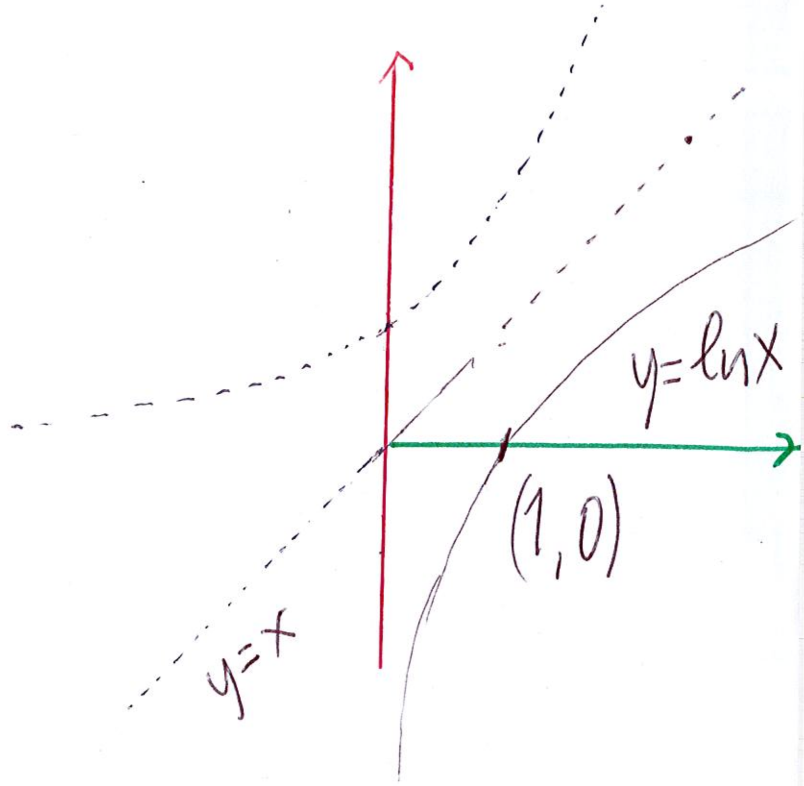
(a) Dann ist f injektiv und $f^{-1}: f(I) \to I$ ist streng monoton wachsend [fallend].

(b) Ist zusätzlich f stetig, so ist $f(I)$ Intervall und $f^{-1}: f(I)$ stetig.

9 Logarithmus, trigonometrische Funktionen

Def 9.1 Die Abbildung $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Ihre Umkehrabbildung $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt (natürlicher) Logarithmus, und wegen des Satzes 8.5 ist streng monoton wachsend und stetig.





Die Umkehrabbildung vertauscht die Rolle von x, y. $\Rightarrow$ Ihr Graph ist Reflektion des Graphen der Abbildung bezüglich der Geraden $y=x$.

Es gilt $e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x$.

$$e^{\ln y} = y, \quad \ln(e^x) = x.$$

Es gilt: $\ln(1)=0$ denn $e^0=1$

$\ln(e)=1$ denn $e^1=e$.