Bem:

In der heutigen Vorlesung taucht folgendes mehrmals auf. Wir wollen eine (Un)gleichung (*) zeigen. Wir wissen nicht ob (*) wahr ist. Wir schreiben

(*) $\Longleftrightarrow$ .... $\Longleftrightarrow$ eine wahre Aussage.

und in den Äquivalenzen formen wir (*) um, (z.B mit Vereinfachungen). Wir bekommen eine wahre Aussage am Ende. Mit Hilfe der Äquivalenzen können wir zurückgehen und (*) ist wahr.

Heute: Algorithmus, Potenz, (allgemein)

Bsp 9.1 Es gilt $\ln\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ (1)

denn (1) $\overset{\text{exp streng}}{\underset{\text{monoton wachsend}}{\Longleftrightarrow}}$ $e^{\ln\frac{1}{2}} < e^{-\frac{1}{2}}$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} < e^{-\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow e^{\frac{1}{2}} < 2$

was stimmt weil $e<3$ (

also $e^{\frac{1}{2}} < \sqrt{3} < 2$). Also stimmt (1)

Eigenschaften: $\ln(1)=0$, $\ln(e)=1$

$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$

$\forall\, x,y>0$ gilt $\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x)-\ln(y)$.

z.B $\left.\begin{array}{l} e^{\ln(xy)} = xy \\ e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy \end{array}\right\}$ $\overset{\text{exp}}{\underset{\text{injektiv}}{\Longrightarrow}}$

$\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$.

z.B $\ln(10) = \ln 2 + \ln 5$.

Bsp 9.2 Zeigen Sie $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \ln x + x$ hat genau eine Nullstelle in $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Lö: f ist stetig (als Summe stetiger Funktionen)

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \underset{\text{Bsp 9.1}}{\overset{(1)}{<}} 0$.

$f\left(\frac{2}{3}\right) > 0$. (2) (zu zeigen).

(Also aus dem Zwischenwertsatz

$\exists\, x_0 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ mit $f(x_0) = 0$.

Dass die Nullstelle eindeutig ist liegt daran dass f streng monoton wachsend ist als Summe solcher Funktionen.)

(2) gilt denn (2) $\iff \ln\frac{2}{3} + \frac{2}{3} > 0$

$\iff \ln\frac{2}{3} > -\frac{2}{3} \overset{\text{exp streng}}{\underset{\text{monoton fallend.}}{\iff}} e^{\ln\frac{2}{3}} > e^{-\frac{2}{3}}$

$\iff \frac{2}{3} > \frac{1}{e^{2/3}} \iff e^{2/3} > \frac{3}{2} \iff$

$e > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Was stimmt weil.

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = 2.25 < e$. Also

stimmt (2).

Die allgemeine Potenz

$\forall\, a>0$ gilt $a = e^{\ln a}$. Wir definieren also $a^x = e^{x \ln a}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$x \mapsto a^x$ stetig, $a^x > 0$ $\forall\, x > 0$.

$a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$.

$(a^y)^x = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$. ($\forall\, a,b>0$)

Sei $a>0$, $a \neq 1$. Dann ist die Abbildung: $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, $x \mapsto a^x$ streng monoton, stetig und bijektiv. und ebenso ihre Umkehrabbildung $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. (Logarithmus zur Basis a).

Also $\log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$a^{\log_a y} = y, \quad \forall y \in (0,\infty).$

<u>Bem</u>: Für $a > 1$, sehen die Graphen von a^x, $\log_a x$ ähnlich, wie die Graphen von e^x, bzw $\ln x$.

<u>Bsp 9.3</u>: $\log_{10} 1000 = 3$, da $10^3 = 1000$.

$23 \leq \log_{10} N < 24$ und $N \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow$ N hat 24 Ziffern (z.B die Avogadro Zahl).

<u>Bsp 9.4</u> Seien $x, b > 0$, $a \neq 1$. Dann

$$\boxed{\log_a(x^b) = b \log_a(x).}$$ (3), denn

(3) $\xleftarrow[\text{monoton für } a \neq 1]{a^x \text{ ist streng}}$ $a^{\log_a(x^b)} = a^{\log_a(x) b}$

$\Longleftrightarrow x^b = (\underbrace{a^{\log_a(x)}}_{x})^b \Longleftrightarrow x^b = x^b$.

was stimmt also ist (3) wahr.

(3) kann man direkt in der Klausur verwenden.

Satz 9.1 : $\forall a, y \in (0, \infty)$, $a \neq 1$:

$$\boxed{\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}.} \quad (4).$$

Beweis (4) $\overset{a^x \text{ ist streng}}{\underset{\text{monoton für } a \neq 1}{\Longleftrightarrow}}$ $a^{\log_a y} = a^{\frac{\ln y}{\ln a}}$

Da $a^x = e^{x \ln a}$

$\Longleftrightarrow y = \left(e^{\frac{\ln y}{\ln a}}\right)^{\ln a}$. $\Longleftrightarrow y = e^{\ln y}$

Was stimmt also ist (4) wahr.

Bsp 9.5 $\log_{10}(e^2) = \frac{\ln(e^2)}{\ln(10)} = \frac{2}{\ln(10)}$.

$\log_{10}$

Bsp 9.6 Zeigen Sie, dass

$$\log_3(\sqrt{11}-\sqrt{2}) = 2 - \log_3(\sqrt{11}+\sqrt{2}) \quad (5)$$

$$(5) \iff \log_3(\sqrt{11}-\sqrt{2}) + \log_3(\sqrt{11}+\sqrt{2}) = 2$$

$$\xLeftrightarrow{\ln x + \ln y = \ln(xy)} \log_3\left[(\sqrt{11}-\sqrt{2})(\sqrt{11}+\sqrt{2})\right] = 2$$

$$\iff \log_3(\sqrt{11}^2 - \sqrt{2}^2) = 2 \iff$$

$$\log_3 9 = 2 \iff 3^2 = 9.$$

Bsp 9.7 Für welche $x > 0$

gilt $x^{\log_{10} x} = 100x$. (6)

$$(6) \xLeftrightarrow[\text{injektiv}]{\log_{10} \text{ ist}} \log_{10}\left(x^{\log_{10} x}\right) = \log_{10}(100x).$$

$$\cancel{\iff (\log_{10} x)^2 = 2 + \log_{10}(x)}$$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(\log_{10} x)^2} = \underbrace{2 + \log_{10}(x)}$

siehe Bsp 9.4

Da $\log_{10}(100x) =$

$= \log_{10} 100 + \log_{10} x$

$= 2 + \log_{10} x$

Also $y^2 = 2 + y$, wobei $y = \log_{10}(x)$.

$\Updownarrow$

$y^2 - y - 2 = 0 \Longleftrightarrow y = -1$ oder $y = 2$.

Also $\log_{10}(x) = -1$ oder $\log_{10}(x) = 2$

$\Leftrightarrow \quad x = 10^{-1}$ oder $x = 10^2$.