1.1 Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist

Bsp 1.1.1 (i) $2 > 3$ (f) (ii) $4 = 2^2$ (w)

1.2 Verküpfung von Aussagen

$A \wedge B$ (A und B) (logisches "und" and)

~~Ist~~

$A \vee B$. (A oder B) (logisches "oder" or).

Wahrheitstafel

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Bsp 1.2.1 $(2^3 = 8) \vee (4^2 = 16)$ (w)

(es ist zugelassen, dass beide Aussagen wahr sind.

$(2^3 = 7) \vee (4^2 = 16)$ (w) $(2^3 = 7) \wedge (4^2 = 16)$ (f).

Negation $\neg A$ (nicht A)

A	w	f
$\neg A$	f	w

Implikation $A \Rightarrow B$

wenn A dann B

A: Es regnet B: die straße ist Nass.

$A \Rightarrow B$ wenn es regnet ist die straße nass.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$

"A genau dann, wenn B".

1.3 Regeln.

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$.

Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen. Manchmal wenn wir zeigen wollen, dass $A \Leftrightarrow B$, zeigen wir, dass $A \Rightarrow B$ und, dass $B \Rightarrow A$.

$$\underbrace{\neg(A \vee B)}_{A \vee B \text{ ist falsch}} \Leftrightarrow [\underbrace{(\neg A) \wedge (\neg B)}_{A \text{ ist falsch und } B \text{ ist falsch.}}]$$

genau dann wenn

ähnlich $[\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)]$.

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow (\neg A)]$ Kontraposition.

1.4 Quantoren

Eine **Aussageform** $A(x)$, $A(x,y)$, $A(x,y,z)$ ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen $x, y, z, \ldots$ enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete kte eine Aussage ist.

Bsp 1.5. $A(x,y)$: $\quad x + y > 2.$

$A(-1, 2.5)$: $\quad -1 + 2.5 > 2 \quad$ (f)

$A(1, \sqrt{3})$: $\quad 1 + \sqrt{3} > 2 \quad$ (w)

Der **Allquantor** $\forall x : A(x)$ bedeutet.
für alle Objekte x ist $A(x)$ wahr.

Der **Existenzquantor** $\exists x : A(x)$ bedeutet
es gibt mindestens ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist

Bsp 1.4.2 Die Aussage (Allquantor).
$\forall x : [(x=3) \Leftrightarrow (x^2=9)]$ ist nicht wahr, weil
für $x=-3$ ist $x=3$ falsch und $x^2=9$ wahr.
Aber $\forall x : [[(x=3) \vee (x=-3)] \Leftrightarrow (x^2=9)]$ ist wahr.

Bsp 1.4.3 $\forall x : [(x^2+5x+6 \neq 0) \Rightarrow (x \neq -2)]$

ist wahr weil $\forall x \; (x=-2) \Rightarrow (x^2+5x+6=0)$

da $(-2)^2+5\cdot(-2)+6=0$. Hier haben wir Kontraposition verwendet (Beweis durch widerspruch.

Bem: In der Praxis wird bei Implikationen oder Äquivalenzen oft $\forall x$: weggelassen.
Also z.B statt. $\forall x: [(x^2+5x+6 \neq 0 \Rightarrow (x \neq -2)]$
schreibt man. $x^2+5x+6=0 \Rightarrow x \neq -2$.

Negation von Quantoren.

$[\neg(\forall x: A(x))] \Leftrightarrow (\exists x: \neg A(x))$. und

$[\neg(\exists x: A(x))] \Leftrightarrow (\forall x: \neg A(x))$.

Bsp 1.44. Mit x bezeichen wir alle Leute, die jetzt im Benz Hörsaal sind. Sei $A(x)$: Die Person x studiert Elektrotechnik.

$\forall x : A(x)$ bedeutet jede Person, die jetzt im Benz Hörsaal ist, studiert Elektrotechnik.

$\exists x : \neg A(x)$ bedeutet: es gibt mindestens eine Person, die jetzt im Benz ist und nicht Elektrotechnik studiert.