2.1 Mengen

Wir verwenden die folgende naive "Definition". Eine Menge ist die Zusammenfassung wohlbestimmter wolhunterschiedlicher Objekte.

Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Beispiel 2.1.1 $M = \{1, 2, 6, 5\}$ ist eine Menge

2 ist Element der Menge M.

Man schreibt $2 \in M$.

3 ist kein Element von M. Man schreibt $3 \notin M \Leftrightarrow \neg(3 \in M)$.

Bem: $x \in M$ ist eine Aussageform, d.h für x gilt entweder $x \in M$ oder $x \notin M$.

$\{1, 3, 5, 3\}$ ist keine Menge, weil 3 zweimal auftaucht

Schreibweisen: Ist A(x) eine Aussage-Form, so kann man schreiben.

$M = \{x : A(x)\}$ = Menge aller x, für die A(x) gilt.

Beispiel 2.1.2 $G = \{x : x \text{ ist gerade Zahl}\}$.

$$L = \{x : x \in G \wedge (x < 100)\}$$

$$= \{x \in G : x < 100\}.$$

L ist die Menge aller gerader Zahlen die kleiner als 100 sind.

2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Defition: "M_1 ist Teilmenge von M_2".

$$M_1 \subseteq M_2 \Leftrightarrow \forall x : (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2).$$

$$\Leftrightarrow \forall x \; x \in M_1 : x \in M_2.$$

Beispiel 2.2.1 Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. und $P = \{n : n \text{ ist eine Primzahl}\}$. Dann $P \subseteq \mathbb{N}$ (Jede Primzahl ist natürliche Zahl) wenn $M_1 \subseteq M_2$ aber $M_1 \neq M_2$ schreibt man $M_1 \subsetneq M_2$ (M_1 ist <u>echte</u> Teilmenge von M_2).

z.B $P \subsetneq \mathbb{N}$ d.h es gibt mindestens eine natürliche Zahl die nicht in P ist (z.B 6). und $P \subseteq \mathbb{N}$.

Gleichheit von Mengen:

$M_1 = M_2$. Bedeutet, dass M_1, M_2 dieselben Elemente haben, also

$(x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$. $\Leftrightarrow$

$(x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2) \wedge (x \in M_2 \Rightarrow x \in M_1)$.

$M_1 = M_2$ bedeutet $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

Beispiel 2.2.2 $M_1 = \{x \in G : \sqrt{5} < x < 10\}$.

$M_2 = \{4, 6, 8\}$.

Dann $M_1 = M_2$.

Hier ist G gleich wie im Bsp 2.1

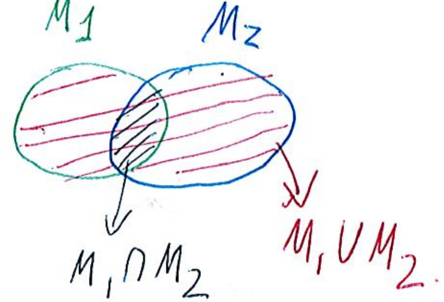
Bem: Statt $A \subseteq B$ schreibt man oft $A \subset B$. Die Bedeutung ist gleich.

2.3 Operationen mit Mengen

Seien M_1, M_2 Mengen

(a) Durchschnitt $M_1 \cap M_2 = \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$.

(b) Vereinigung $M_1 \cup M_2 = \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$.



Beispiele

$M_1 = \{1, 3, 5, 6, 7\}$.

$M_2 = \{2, 5, 7, 8\}$.

$M_1 \cap M_2 = \{5, 7\}$

$M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$.

Regeln für Durchschnitt und Vereinigung.

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen.

Kommutativität $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$, $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$.

Assoziativität $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$

$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$.

Distributivität $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

Außerdem ist $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$,

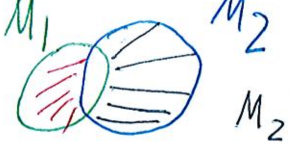
$M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$

(c) Differenz $M_1 \setminus M_2 = \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$.

("M_1 ohne M_2").

Bsp 2.3.2. $M_1 = \{1, 4, 5, 6, 9\}$ $M_2 = \{4, 5, 11, 12\}$.

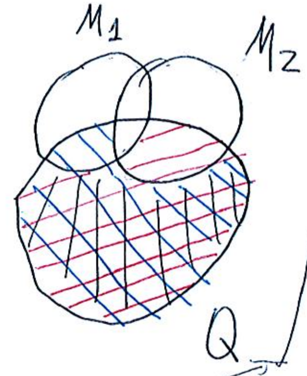
Dann $M_1 \setminus M_2 = \{1, 6, 9\}$.



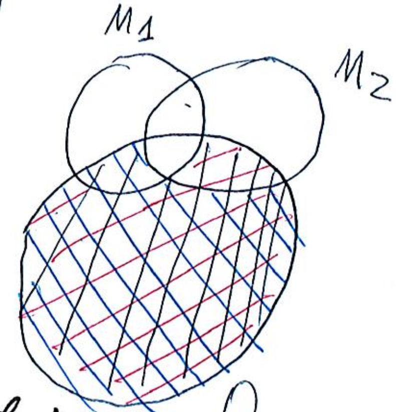
$M_2 \setminus M_1 = \{11, 12\}$

de Morgansche Regeln: Seien M_1, M_2, Q Mengen. Dann gilt

$$Q \setminus (M_1 \cup M_2) = (Q \setminus M_1) \cap (Q \setminus M_2).$$



$$Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2)$$



2.4 Die leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente, d.h. $\forall x, x \in \emptyset$.

Regeln: $M \cup \emptyset = M$, $M \setminus \emptyset = M$.

$M \setminus M = \emptyset$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

Bsp 2.4.1 $\{x \in \mathbb{N} : (x > 2) \wedge (x^3 < 26)\} = \emptyset$:

Es gibt keine natürliche Zahlen, die größer als 2 sind und deren dritte Potenz kleiner als 26 ist.

Bsp 2.3.1 $A=\{1,3,4,5\}$, $B=\{3,4,6,7\}$, $C=\{1,2,3,7\}$. Dann $A\cup B\cap C$.

(1) $=\{1,3,7\}$.

(2) $=\{1,3,4,5,7\}$.

(3) $=\{1,3,4,6,7\}$

(4) keine der obigen Antworten ✓

Grund $(A\cup B)\cap C=\{1,3,4,5,6,7\}\cap\{1,2,3,7\}$
$=\{1,3,7\}$.

$A\cup(B\cap C)=\{1,3,4,5\}\cup\{3,7\}=\{1,3,4,5,7\}$.

Deshalb ist $(A\cup B)\cap C$ nicth wohl definiert

Erinerung: n ist Primzahl wenn $n\in\mathbb{N}$, $n>1$ und n ist nur durch 1 und n teilbar.

Bsp 2.3.3 Sei $P=\{x : x$ ist Primzahl$\}$.

$G=\{x : x$ ist Gerade Zahl$\}$.

Dann $P\cap G=\{2\}$.

Beweisskizze: $\{2\}\subset P\cap G$ (1) weil 2 eine gerade Zahl und eine Primzahl ist (nur durch 1,2 teilbar)

$P\cap G\subset\{2\}$ (2), weil wenn eine gerade Zahl größer als 2 ist dann ist sie teilbar durch zwei also keine Primzahl. Also eine gerade Zahl die Primzahl ist muss die Zahl 2 sein.

(1), (2) $\Rightarrow P\cap G=\{2\}$.

2.5 Das kartesische Produkt:

Seien M_1, M_2 Mengen. Die Menge der geordneten Paare (x_1, x_2) mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ heißt das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$ der Mengen M_1, M_2. Also

$$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}.$$

Beispiele: $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{0, 2, 4\}$.

$$M_1 \times M_2 = \{(1,0), (1,2), (1,4), (2,0), (2,2), (2,4)\}$$

Bemerkung: Allgemein $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$.

z.B ist $M_1 = \{1, 2\}$ $M_2 = \{6\}$

dann $M_1 \times M_2 = \{(1,6), (2,6)\}$, $M_2 \times M_1 = \{(6,1), (6,2)\}$

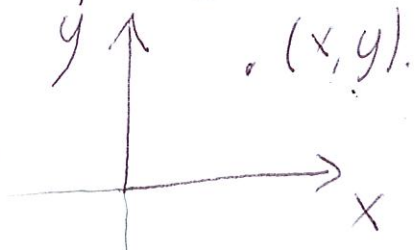
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M_1, M_2, \dots, M_n$ Mengen dann

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n\}.$$

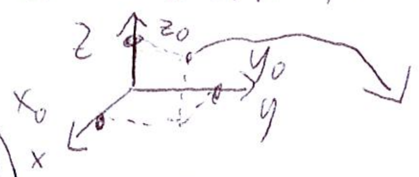
Bsp 2.5.1 $M = \{0, 1\}$.

$$M^3 = M \times M \times M$$
$$= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

Bsp 2.5.2 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.



$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.



(x_0, y_0, z_0).