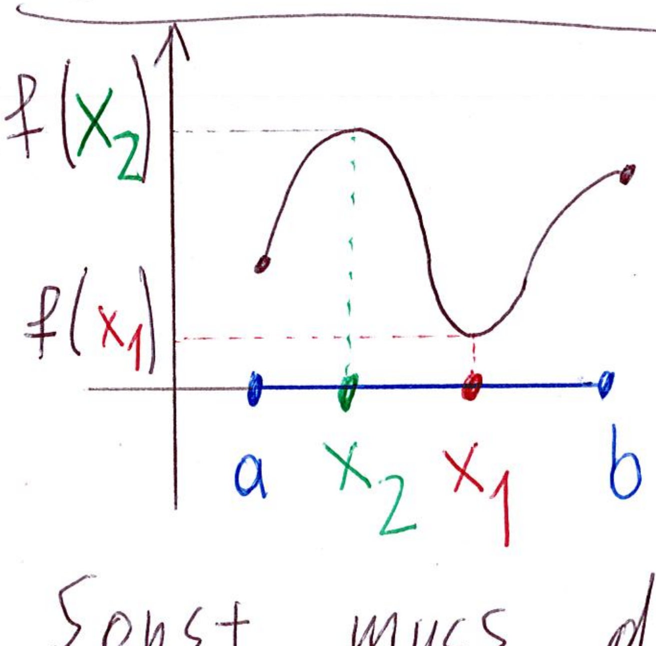
Maximum / Minimum stetiger Funktionen

Satz Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann $\exists \; x_1, x_2 \in [a,b]$, so dass

$$\underbrace{f(x_1)}_{\text{Minimum}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{\text{Maximum}}, \; \forall x \in [a,b]$$

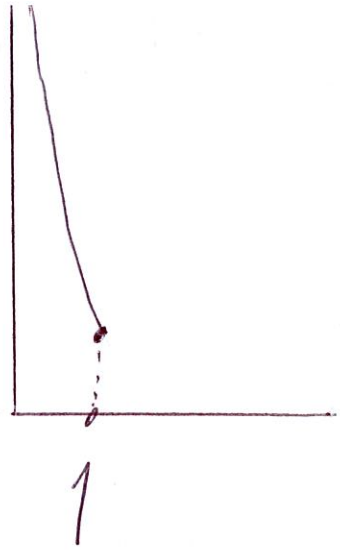
Insbesondere ist $f([a,b])$ beschränkt.



Sehr wichtig: $[a,b]$ ist abgeschlossenes Intervall.

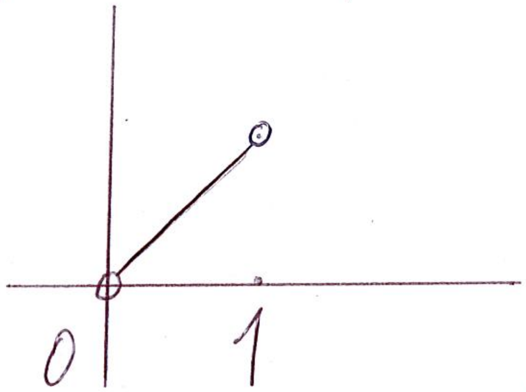
Sonst muss die Funktion nicht unbedingt Maximum/Minimum haben.

Bsp 9.13 (i) $g: (0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$



ist stetig aber hat kein Maximum. Allerdings ist $g((0,1])$ nicht beschränkt.

(ii) $h: (0,1) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$.



h ist beschränkt (das heißt das Bild $h((0,1))$ ist beschränkt).

und stetig hat aber kein Minimum / Maximum.

10 Differentialrechnung

10.1 Differenzierbarkeit

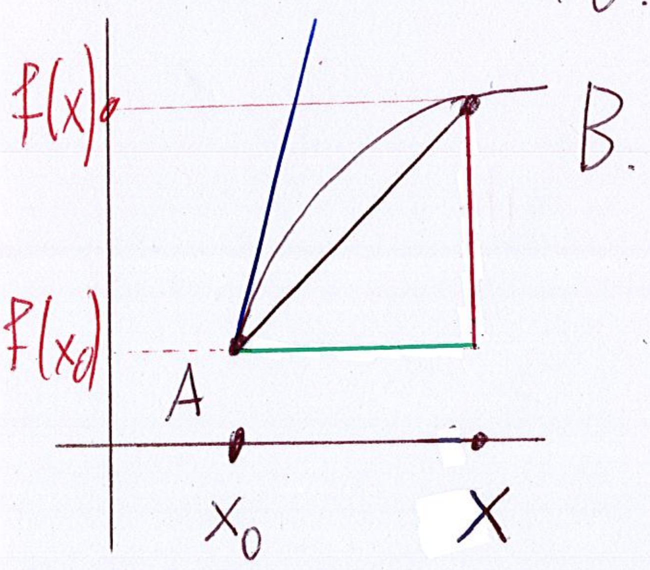
I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

$\boxed{\text{Def 10.1}}$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

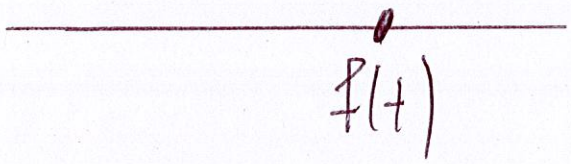
f heißt differenzierbar (dbar) in x_0.

Dann $$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Steigung von AB}}}_{\text{Steigung wenn } x \to x_0}$$

Ableitung von f in x_0.



$f'(x_0)$ besagt wie schnell f sich ändert wenn x sich in der Nähe von x_0 ändert.



Sehr wichtig

Sei t Zeit und $f(t)$ Ort eines sich bewegenden Punktes auf der Geraden der reellen Zahlen. Dann ist $f'(t_0)$ die Geschwindigkeit in t_0.

Bem 10.1 $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{\substack{\text{dann} \\ h \to 0 \\ x = x_0 + h}}{\overset{h = x - x_0}{=\!=\!=}} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Satz 10.1 f dbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0.

Beweis $$\lim_{x \to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Erweiterung von Def 10.1

f dbar $\Leftrightarrow$ f dbar in x, $\forall x \in I$.

Bsp 10.1.1 (i) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\forall x \neq x_0$ gilt $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^n - x_0^n}{x-x_0}$

Übungsblatt 3
Aufgabe 4b

$$= \frac{(x-x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}}{x-x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}.$$

Allgemein gilt $f(x) = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$

dann $f'(x_0) = a x_0^{a-1}$.

(ii) $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\underbrace{|e^h - 1 - h| \leq \frac{|h|^2}{2} e^{|h|}}$ (*)

Eigenschaft (12) der Exponentialreihe

$$\Rightarrow \left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| \leq \frac{|h|}{2} e^{|h|} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad (1).$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \underset{(1)}{\xrightarrow{h \to 0}} e^{x_0}.$$

Also $(e^x)' = e^x$. Ferner gilt

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x$$

Bsp 10.1.2 $f(x) = |x|$ ist in 0 nicht dbar

da $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$

und $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existiert nicht.

10.2 Ableitungsregeln

Satz 10.2 Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 dbar (I Intervall) und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \quad \text{(Produktregel)}$$

$$g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Man schreibt auch.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$

Bsp 10.2.1 $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$= \underbrace{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}_{= 1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Produktregel Beweis:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow \atop f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\downarrow \atop g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow \atop g'(x_0)}$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Kettenregel: $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

(wenn die Ableitungen der rechten Seite existieren.

"Beweis": $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\to\, g'(f(x_0))} \; \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to\, f'(x_0)}$$

Bsp 10.2.2 $\quad (\tan x)^{\frac{1}{3}} = f(g(x))$,

wobei $\quad g(x) = \tan x, \quad f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

(Da $\quad f(g(x)) = f(\tan x) = (\tan x)^{\frac{1}{3}}$.

$\left((\tan x)^{\frac{1}{3}}\right)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$.

Aber $\quad g'(x) = (\tan x)' \overset{\text{Bsp 10.2.1}}{=} \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow f'(g(x)) = f'(\tan x) = \dfrac{1}{3} (\tan x)^{-\frac{2}{3}}$)

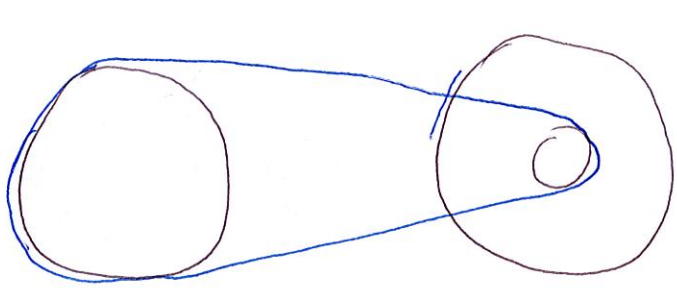
$\Longrightarrow$

$\left((\tan x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3} (\tan x)^{-\frac{2}{3}} \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

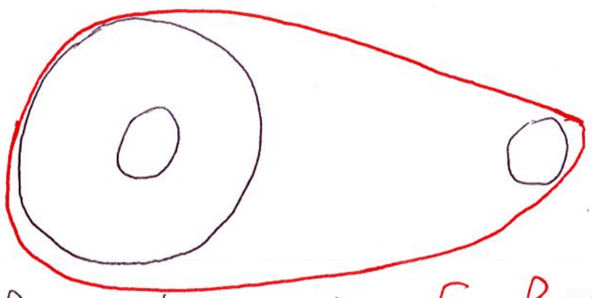
Illustration der Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

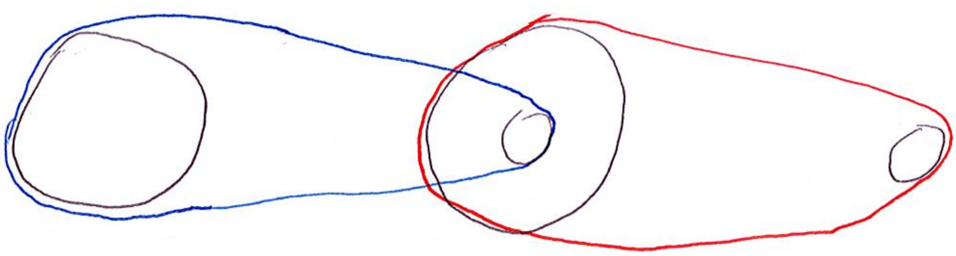
Änderungsrate von $f \circ g$ bzg x	Änderungsrate von f bzg g	Änderungsrate von g bzg x.



1 Rotation $\Rightarrow$ 4 Rotationen



1 Rotation $\Rightarrow$ 5 Rotationen



1 Rotation $\Longrightarrow$ $4 \cdot 5 = 20$ Rotationen