Heute $I \subseteq \mathbb{R}$ immer Intervall $x_0 \in I$

$f: I \to \mathbb{R}$. Themen: $f' \rightsquigarrow (f^{-1})'$? Berechnung von Minimum/Maximum einer Funktion

Mittelwertsatz., locales

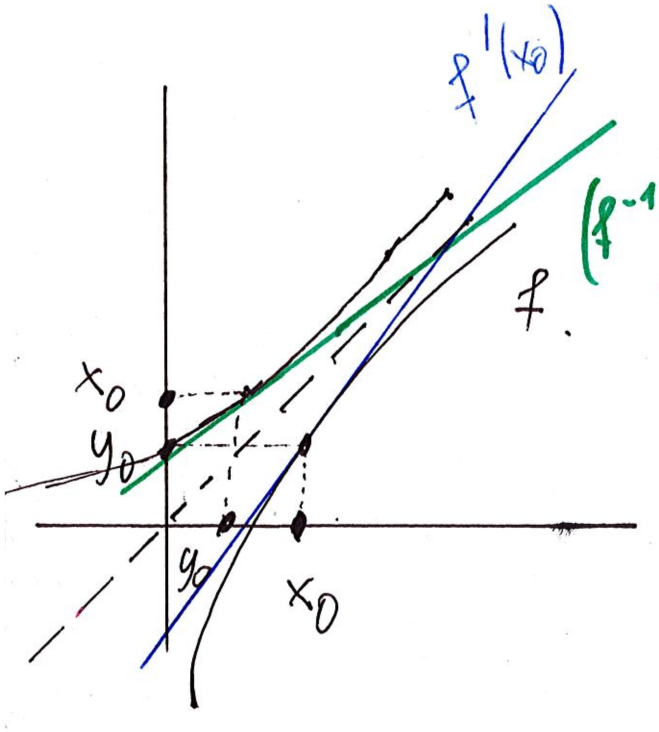
<u>Satz über die Umkehrfunktion (10.3).</u>

Sei f stetig, streng monoton auf I.

f dbar in x_0 und $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}: f(I) \to I$ dbar in $y_0 = f(x_0)$ und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ (1)

<u>Beweisidee</u>: Für $y \in f(I)$ sei $x = f^{-1}(y)$.

Dann $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow[\substack{x = f^{-1}(y) \\ y = f(x)}]{\substack{x_0 = f^{-1}(y_0) \\ y_0 = f(x_0)}} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$



Die blaue und grüne Geraden sind Reflektion von einander bzg $y = x$ (genau so wie die Graphen)

$\Rightarrow$ Produkt der Steigungen $= 1$

Bsp 10.2.4 (i) Da $(\tan)' \overset{\text{Bsp 10.2.1}}{=\!=} 1 + \tan^2$ (2)

$$(\tan^{-1}(x))' \overset{(1)}{=} \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}x)} \overset{(2)}{=\!=} \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{da } \tan(\tan^{-1}x) = x).$$

(ii) $$(\ln(x))' \overset{(1)}{=\!=} \frac{1}{(E)'(\ln x)} \overset{E'=E}{=\!=} \frac{1}{E(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

$E(x) := e^x$

Alternativ $g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(g(x)) = x$

$\Rightarrow (f(g(x)))' = (x)' = 1 \Rightarrow f'(g(x))\, g'(x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Bsp 10.2.5 (i) $g(x) = \ln x$ dann $x = e^{g(x)}$

$$\Rightarrow (x)' = (e^{g(x)})' \Rightarrow 1 = g'(x)\underbrace{e^{g(x)}}_{=x} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$g(x) = \arctan x = \tan^{-1} x \Rightarrow \quad x = \tan g(x)$

$\Rightarrow \quad (x)' = (\tan g(x))' \quad \xRightarrow{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x}$

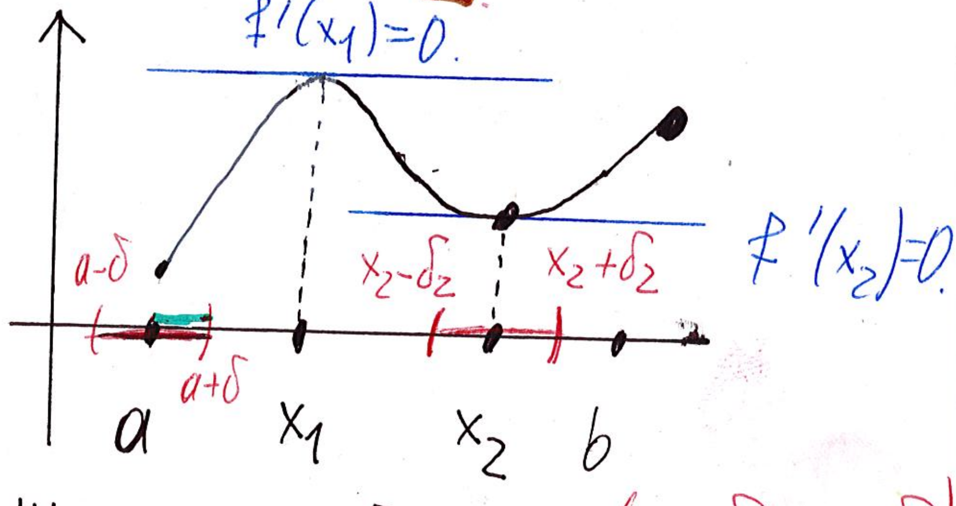
$1 = \left(1 + (\tan(g(x)))^2\right) g'(x) \quad \xRightarrow{x = \tan g(x)}$

$1 = (1+x^2)\, g'(x) \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

$\boxed{\text{Def } 10.2}$ f hat lokales $\overbrace{\text{Minimum [Maximum]}}^{\text{Extremum}}$ in $x_0 \Leftrightarrow \exists\ \delta > 0$, so dass $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \geq f(x_0)$ $[f(x) \leq f(x_0)]$

Bsp

$f : [a,b] \to \mathbb{R}.$



$f(x_2)$: kleinste Wert von f in $(x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$

$\Rightarrow$ lokal Minimum in x_2.

Trotzdem kein (globales) Minimum da z.B $f(x_2) > f(a)$.

$f(a)$: kleinste Wert in $[a, a+\delta) = [a,b] \cap (a-\delta, a+\delta)$
$\Rightarrow$ lokales Minimum in a.

Ähnlich: lokales Maximum in x_1, b

<u>Bem</u>: Ein Extremum (Min, Max) ist auch ein lokales Extremum.

<u>Satz 10.4</u> Hat f lokales Extremum in x_0 und $\exists\, \delta > 0$ mit $\underbrace{(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I}$ und f dbar in x_0 dann $f'(x_0) = 0$

x_0 ist nicht am Ende des Intervals.

Illustration. (Skizze) $(x_2-\delta_2, x_2+\delta_2) \subset [a,b]$
lokal Minimum in x_2 $f'(x_2)$ existiert $\Big\} \Rightarrow f'(x_2) = 0$.

Es ist aber möglich, dass $f'(a) \neq 0$.

Beweis für x_2 $\quad f'(x_2) = \lim\limits_{x \to x_2} \dfrac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$

Also

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_2)}^{\geq 0 \text{ da } f(x_2) \text{ lokales Minimum}}}{\underbrace{x - x_2}_{\geq 0 \text{ da } x \to x_2+}} \geq 0.$$

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_2)}^{\geq 0 \text{ da } f(x_2) \text{ lokales Minimum}}}{\underbrace{x - x_2}_{\leq 0 \text{ da } x \to x_2-}} \leq 0$$

$\Rightarrow f'(x_2) = 0.$

<u>Korallar</u>: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in (a,b) dbar, und $f(x_1)/f(x_2)$ Maximum/Minimum von f. Dann $\underbrace{x_j \in \{a,b\} \text{ oder } f'(x_j) = 0}_{\text{einzige Kandidaten}}$.

Also $\max f := \max f([a,b]) = \max f(\{a,b\} \cup A)$.
$\min f := \min f([a,b]) = \min f(\{a,b\} \cup A)$,
wobei $A = \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\}$.

Bsp 10.2.6 $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2+x-5)$.
$\max f$, $\min f$? (Klausur 2014).

Lö: $f'(x) = (e^x)'(x^2+x-5) + e^x(x^2+x-5)'$

$= e^x(x^2+x-5) + e^x(2x+1) = e^x(x^2+3x-4)$

$= e^x(x-1)(x+4)$. Also

$f'(x) = 0 \iff x = 1$ oder $\underbrace{x = -4}_{\substack{\text{nicht in } [-2,2] \\ \text{kein Kandidat.}}}$

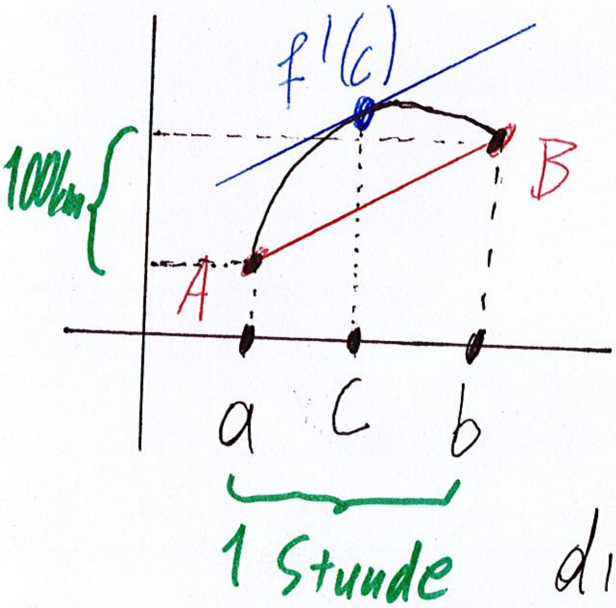
Also $\max f = \max f(\{-2,2,1\}) = \max\{f(-2), f(2), f(1)\}$.
$\min f = \min\{f(-2), f(2), f(1)\}$.

Da $f(2) = e^2(2^2+2-5) = e^2$.
$f(1) = e^1(1^2+1-5) = -3e$.
$f(-2) = e^{-2}(2^2+2-5) = -3e^{-2}$

bekommen wir $\max f = e^2$
$\min f = -3e$.

10.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 10.5 Mittelwertsatz (MWS). Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) dbar. Dann $\exists\ c \in (a,b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Illustration

(1) geometrisch: Für geeignetes c ist $f'(c)$ die Steigung von AB.

2) Mit Geschwindigkeit: Ein Auto fuhr auf einer geraden Straße 1 Stunde und ist 100km weiter gefahren. Dann in einem Moment c ist das Auto mit 100km/Stunde gefahren.

Folgerungen: Seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ dbar Intervall.

(1) $f' = 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist konstant auf I.

(2) $f' = g'$ auf $I \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.

(3) $f' \geq 0$ $[f' > 0] \Rightarrow f$ [streng] monoton wachsend

$\leq$ $<$ fallend

Beweisideen:

(1) Ist $f' = 0$ und $a \in I$. z.z. $f(b) = f(a)$ $\forall b \in I$. Nach MWS $\exists c$ zwischen a, b mit $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$

Da $f' = 0$

Also $f(b) = f(a)$ $\forall b \in I$.

(2) $f' = g' \Rightarrow (f - g)' = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R}$ mit $f - g = c \Rightarrow f = g + c$.

(3) z.B. $f' > 0$. Ähnlich wie in (1).

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0$. Also wenn $b > a$ dann

$f(b) - f(a) = \underbrace{(b - a)}_{>0} \underbrace{f'(c)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(b) > f(a)$. Also f streng monoton wachsend.