Heute: Taylorsatz Approximation von Funktionen durch Polynome.
⇝ Computer kann approximieren.

Liefert auch Reihendarstellungen z.B.

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)=f(x)f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R} \\ \text{und} \quad f'(0)=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Taylor}} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x \quad (1)$$

Ähnlich sind sin, cos wie in der Schule. $\xrightarrow{\text{Taylor}}$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (3).$$

$$\boxed{(1),(2),(3)} \Longrightarrow \boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

$$|x|\le\frac{\pi}{15} \text{ (12 Grad)} \xrightarrow{\text{Taylor}} \left|\frac{\sin x}{x}-1\right|\le\frac{1}{100}.$$

10.4 Höhere Ableitungen und Taylorsatz

Heute: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $f: I \to \mathbb{R}$ dbar (differenzierbar).

Def 10.3 Sei $x_0 \in I$. f heißt 2 Mal dbar in x_0 $\Longleftrightarrow$ f' dbar in x_0. Dann $f''(x_0) = (f')'(x_0) \rightsquigarrow$ zweite Ableitung von f in x_0.

Ähnlich definiert man $f^{(n)}(x_0)$ n-te Ableitung von f in x_0.

Def 10.4 $f \in C^n(I) \Leftrightarrow$ f ist n-Mal dbar und $f^{(n)}$ ist stetig ("f ist n-Mal stetig dbar").

Bsp 10.4.1 $I = [0, \infty)$, $f(x) = x^{3/2}$. Dann $f \in C^1(I)$ und $f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$. Aber $f \notin C^2(I)$ da $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\frac{3}{2} x^{1/2}}{x} = \infty$.

$f \in C^\infty(I) \iff f \in C^n(I) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

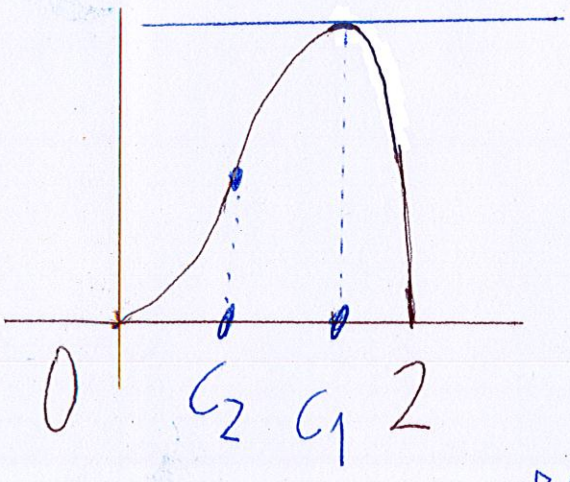
(z.B. $f(x)=e^x$ ist in $C^\infty(I)$ und $f^{(n)}(x)=e^x \quad \forall n\in\mathbb{N}$). $\left(C(I)=C^0(I)\right)$

<u>Bsp 10.4.2</u> Sei $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ $f\in C^2([0,2])$

f'' dbar. Ist

$$0=f(0)=f'(0)=f''(0). \ (1), \quad f(2)=0. \ (2)$$

dann $\exists\, c\in(0,2)$ mit $f'''(c)=0$.



<u>Lö</u> $\left.\begin{array}{l} f(0)\overset{(1)}{=}0\overset{(2)}{=}f(2) \\ f \text{ dbar} \end{array}\right\} \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists\, c_1\in(0,2)$ mit

$$f'(c_1)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=0. \ (3)$$

$\left.\begin{array}{l} f'(0)\overset{(1)}{=}0\overset{(3)}{=}f'(c_2) \\ f' \text{ dbar} \end{array}\right\} \underset{\text{für } f'}{\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}} \exists\, c_2\in(0,c_1)$

mit $(f')'(c_2)=\dfrac{f'(c_1)-f'(0)}{c_1-0}=0. \ (4)$

$$\left.\begin{array}{l} f''(0) \overset{(1)}{=} 0 \overset{(4)}{=} f''(c_2) \\ f'' \text{ dbar} \end{array}\right\} \xrightarrow[f']{\text{MWS für}} \exists\, c \in (0, c_2)$$

mit $(f'')'(c) = \dfrac{f''(c_2) - f''(0)}{c_2 - 0} = 0$ was zu zeigen war.

Ähnlich kann man zeigen

<u>Lemma 10. .1</u>. Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^n([0,2])$, $f^{(n)}$ dbar. Ist $0 = f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0)$, $f(2) = 0$ dann $\exists\; c \in (0,2)$ mit $f^{(n+1)}(c) = 0$.

<u>Taylorsatz Überlegungen</u>: Sei f eine Funktion. Gibt es

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ mit

$f(x) \approx p(x)$ nah bei 0?

Beobachtung: $p(0) = a_0 = 0!\, a_0$. (5)

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \Rightarrow p'(0) = a_1 = 1!\, a_1$ (6)

$p''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x \Longrightarrow p''(0) = 2a_2 = 2!\, a_2$. (7)

$p'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 \Longrightarrow p'''(0) = p^{(3)}(0) = 3!\, a_3$ (8).

Damit $f(x) = \varphi(x)$ nah bei 0 wäre angemessen wäre zu verlangen

$f(0) = p(0)$

$f'(0) = p'(0)$.

$f''(0) = p''(0)$

$f'''(0) = p'''(0)$

$\xrightarrow[(7),(8)]{(5),(6)}$

$a_0 = \dfrac{f^{(0)}(0)}{0!}$

$a_1 = \dfrac{f^{(1)}(0)}{1!}$

$a_2 = \dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}$

$a_3 = \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}$

Also z.B $f(x) = e^x$ dann $f^{(n)}(0) = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ also $p(x) = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$.

Sei f 4 Mal auf I dbar $0 \in I$ und

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - a_4 x^4; \quad a_4 \in \mathbb{R}.$$

Dann $g(0), g'(0), g^{(2)}(0), g^{(3)}(0), g^{(4)}(0)$

(i) sind alle Null

(ii) Sind alle Null bis auf $g^{(4)}(0)$ was nicht unbedingt Null sein muss.

(iii) $g(0)=0$ aber für den Rest ist es unklar.

(iv) keine der obigen Antworten

(v) keine Ahnung.

<u>Lö:</u> Es gilt

$$g(x) = f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!} x - \frac{f''(0)}{2!} x^2 - \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 - a_4 x^4.$$

Also $g(0) = f(0) - f(0) = 0.$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f'(0)}{1!} - \frac{f''(0)}{2!} 2x - \frac{f^{(3)}(0)}{3!} 3x^2 - 4a_4 x^3.$$

Also $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$.

$$g''(x) = f''(x) - \frac{f''(0)}{2!} 2! - \frac{f^{(3)}(0)}{3!} 3 \cdot 2x - 4 \cdot 3 a_4 x^2.$$

Also $g''(0) = f''(0) - f''(0) = 0$.

$$g'''(x) = f'''(x) - \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot 3! - 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x.$$

Also $g^{(3)}(0) = f^{(3)}(0) - f^{(3)}(0) = 0$.

$$g^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) - 4! a_4$$

$$\Rightarrow g^{(4)}(0) = f^{(4)}(0) - 4! a_4.$$

Also ist (ii) richtig. Allgemeiner:

Lemma 10.2: Sei f auf I $(n+1)$ Mal dbar, $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - a_{n+1} x^{n+1}$

$a_{n+1} \in \mathbb{R}$. $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0.$$

Taylorsatz 10.6

Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^n(I)$, $f^{(n)}$ auf I dbar. Sind $x_0, x \in I \Longrightarrow$ $\exists\, c$ zwischen x_0, x mit:

$$\underset{\downarrow}{f(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{}$$

Echte Funktion allgemein vom Computer nicht berechnenbar

n-te Taylorpolynom um x_0
$T_n(f; x_0)(x)$
↓
Approximation von f vom Computer berechnenbar.

n-tes Restglied.
$R_n(f; x_0)(x)$
Fehler der Approximation.

Wenn $f \in C^\infty(I)$ und $\lim_{n\to\infty} R_n(f, x_0)(x) = 0 \ \forall x \in I$

dann $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{} = \lim_{n\to\infty} T_n(f, x_0)(x)$

Taylorreihe von f um x_0.

Bem: Der Taylorsatz für $n=0$ gibt

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{Mittelwertsatz.}$$

Beweis für $x_0 = 0$, $x=2$. z. z.

$\exists\ c \in (0,2)$ mit

$$f(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 2^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 2^{n+1} \quad (*)$$

Sei $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - \frac{m\, x^{n+1}}{(n+1)!}$,

wobei $m \in \mathbb{R}$, so dass $g(2)=0$.

Lemma 10.2 $\rightsquigarrow$ $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$ $\overset{\text{Lemma 10.1}}{\Longrightarrow}$

$\exists\ c \in (0,2)$ mit $g^{(n+1)}(c) = 0$.

Aber $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!}{(n+1)!} m$ $\Longrightarrow$

$f^{(n+1)}(c) = m$. Also.

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Da aber $g(2)=0$, folgt $(*)$.

Klärung: m wurde so gewählt, dass $g(2)=0$.

$$g(2) = f(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 2^k - \frac{m\, 2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Also $g(2)=0 \iff$

$$\frac{m\, 2^{n+1}}{(n+1)!} = f(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 2^k. \iff$$

$$m = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \left(f(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 2^k \right).$$