Bsp 10.4.3 (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $\exists\, c$ zwischen $0, x$ mit

$$\sin x = x - \frac{\cos(c)}{3!} x^3 \quad (1)$$

(ii) Zeigen Sie $0{,}0998 < \sin(0{,}1) < 0{,}1$. (2)

(iii) $0 < |x| \leq \frac{\pi}{15} \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leq \frac{1}{100}$.

Lö: (i) Sei $f(x) = \sin x$. Nach Satz von Taylor $\exists\, c$ zwischen $0, x$ mit.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(c)}{3!} x^3.$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & \Rightarrow & f(0) = 0. \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & \Rightarrow & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & \Rightarrow & f'''(c) = -\cos(c) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 - \frac{\cos(c)}{3!} x^3$$

Also stimmt (1).

(ii) Aus (1) folgt $\sin(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{\cos(c)}{3!} 0{,}1^3$ (3)

$c \in (0, 0{,}1)$. Also $0 < \cos(c) < 1$.

[da $0 < \cos y < 1$ für $y \in (0, \frac{\pi}{2}) \supset (0, 0{,}1)$].

Also $-1 < -\cos(c) < 0 \xRightarrow{\frac{0{,}1^3}{3!} > 0}$

$$-\frac{0{,}1^3}{3!} < -\frac{\cos(c)}{3!} < 0 \Rightarrow$$

Aber $-\frac{0{,}1^3}{3!} = -\frac{0{,}001}{6} > -\frac{0{,}001}{5} > -0{,}0002$

Also $-0{,}0002 < -\frac{\cos(c)}{3!} < 0$

$$\Rightarrow \underbrace{0.1 - 0{,}0002}_{= 0.0998} < 0{,}1 - \frac{\cos(c)}{3!} < 0{,}1.$$

was zusammen mit (3), die (2) liefert.

(iii) Aus (1) folgt.

$$\sin x - x = -\frac{\cos(c)}{3!} x^3 \xRightarrow[\text{dieren.}]{\text{mit } x \text{ divi}}$$

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{\cos(c)}{3!} x^2 \implies$$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \frac{|\cos(c)|}{3!} x^2 \overset{\cos(c) \le 1}{\le} \frac{x^2}{3!} \overset{|x| \le \frac{\pi}{15}}{\le} \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^2$$

$$\le \frac{1}{3!}\left(\frac{3{,}15}{15}\right)^2 = \frac{2{,}1^2}{3!} \cdot 10^{-2} \le \frac{1}{100}.$$

Bsp 10.4.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$f(x+y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (4), und $f'(0) = 1$. (5)

(i) Zeigen Sie: $f(0) = 1$. (6)

(ii) Zeigen Sie: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)} = f$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Zeigen Sie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(i) (5) $\implies$ f kann nicht die Null Funktion sein. Also $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$. (7)

Aber $f(x_0) = f(x_0+0) \overset{(4)}{=} f(x_0)f(0) \Longrightarrow$

$f(x_0) = f(x_0)f(0) \overset{(7)}{\Longrightarrow} f(0)=1.$

(ii). $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{(4)}{=} \dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h} =$

$f(x)\dfrac{f(h)-1}{h} \overset{(6)}{=} f(x)\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0} \Longrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0} = f(x)f'(0)$

$\overset{(6)}{=} f(x)$. Also ist f dbar und

$f'=f$. Mit Induktion folgt leicht, dass $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}=f$, $\forall n\in\mathbb{N}$. (8)

(iii) Sei $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Dann nach Taylor $\exists\, c_n$ zwischen $0, x$ mit

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dfrac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^n \overset{(5),(8)}{\Longrightarrow}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + f(c_n)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (9)$$

Aber $\left| f(c_n)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq D \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (*)$

$D = \max_{c \in [0,x]} |f(c)|$.

oder $c \in [x,0]$.

Aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ ist konvergent

(Bsp 7.6.1 v 14). $\xRightarrow{\text{Satz 7.1(4)}} \frac{|x|^n}{n!} \to 0$.

Also $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$. Deshalb. $(*)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(c_n)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \xRightarrow{(9)}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Also ist $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

<u>Bsp 10.4.5</u> Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$.

(i) Zeigen Sie: $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \forall x \leq 0$. (10)

(ii) Bestimen Sie $n \in \mathbb{N}$ so klein wie möglich, so dass $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ den Wert e^{-1} mit Fehler kleiner als 0,01 approximiert.

(i) Aus (9) folgt.

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \text{ zwischen } 0, x.$$

also $c \leq 0$.

$$\Rightarrow \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \underbrace{e^c}_{\leq 1 \text{ da } c \leq 0} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Also stimmt (10).

(ii) (10) $\Rightarrow \left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$

Also wenn $(n+1)! > 100$ ist der Fehler sicher $< \frac{1}{100}$. Da

$3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ wäre $n = 4$ das gesuchte n.

Bem (Ergänzung) Wenn $n \leq 3$.

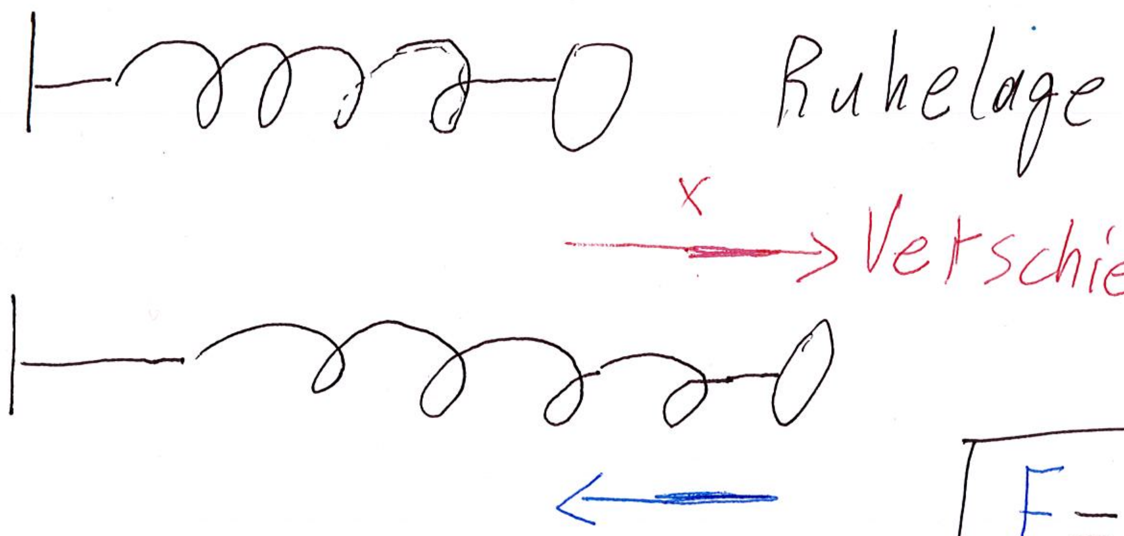
$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} \overset{\text{da } c \text{ zwischen } 0, -1}{\geq} \frac{e^{-1}}{4!}$$

$$\underset{\text{weil } e^{-1} > \frac{1}{3}}{>} \frac{1}{3 \cdot 24} = \frac{1}{72} > \frac{1}{100}.$$

Also, wenn $n \geq 3$ ist der Fehler tatsächlich $> \frac{1}{100}$.

Bem: Die Fragestellung (ii) ist wichtig: Wenn wir verlangen, dass e^{-1} mit Fehler $< 0{,}01$ approximiert wird dann "weiß" der Computer, dass er aufhören kann, Terme zu summieren.

Anwendung des Taylorsatzes: Das Hooksche Gesetz.



$$\boxed{F = -k\,x}$$

Hooksche Konstante.

Warum wird in der Physik gesagt, dass das Hooksche Gesetz ist angemessen wenn x klein?

Kann man mit dem Satz von Taylor sehen. Ist $F=F(x)$ 2 Mal dbar dann $\exists\, c$ zwischen $0, x$ mit.

$$F = \underbrace{F(0)}_{\substack{=0 \text{ Kraft} \\ \text{der Ruhelage}}} + \underbrace{F'(0)}_{-k} x + \frac{F''(c)}{2!} x^2.$$

Also $F = -kx + \frac{F''(c)}{2!} x^2.$

Ist x klein genug dann

$\left| \frac{F''(c)}{2!} x^2 \right| << |kx|$ also $F \approx -kx.$