Satz 10.7 (Folgerung des Taylorsatzes)

Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in C^3(I)$, $x_0 \in I$ mit x_0 kein Randpunkt von I (z.B wenn $I = [0,1]$ dann $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$). Sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (1) \text{ und}$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ $[f^{(n)}(x_0) < 0]$

$\Rightarrow$ f hat in x_0 lokales Min [Max]

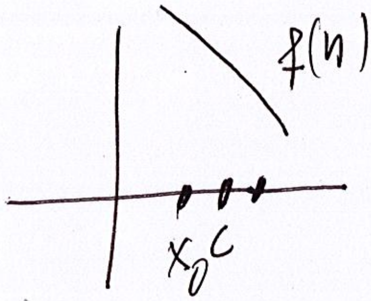
(b) n ungerade $\Rightarrow$ kein lokales Extremum in x_0.

Beweisidee: Ist $x \in I$ $\xrightarrow{\text{Taylor}}$ $\exists$ c zwischen x_0, x

mit $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\overset{(1)}{=} 0} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (2)$$

x nah bei x_0 $\Rightarrow$ c nah bei x_0 also $f^{(n)}(x_0)$, $f^{(n)}(c)$ haben das gleiche Vorzeichen.



Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$

Dann $\underbrace{f^{(n)}(c)}_{\geq 0} \underbrace{\frac{(x-x_0)^n}{n!}}_{\geq 0 \text{ da } n \text{ gerade}} \geq 0$.

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow$ lokales Min in x_0.

Ähnlich wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$.

n ungerade $(x-x_0)^n$ hat kein eindeutiges Vorzeichen. Also $f(x_0)$ ist kein lokales Extremum.

$\boxed{\text{Bsp 10.4.6}}$ Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = (x^2+1)e^x$.
Hat f lokales Extremum in $x = -1$?

Lösung: $f'(x) = (x^2+1)(e^x)' + (x^2+1)'e^x$

$= (x^2+1)e^x + 2xe^x = (x^2+2x+1)e^x$

$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^2 e^x$.

Also $f'(-1)=0$. (3)

$$f''(x)=\left[(x+1)^2\right]' e^x+(x+1)^2(e^x)'$$

$$=2(x+1)e^x+\underbrace{(x+1)^2e^x}_{=f'(x).} \Rightarrow f''(-1)=0 \ (4)$$

$$f'''(x)=2\left[(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'\right]+f''(x).$$

$$=2(x+2)e^x+f''(x)$$

$$\Rightarrow f'''(-1)=2e^{-1}+f''(-1)\overset{(4)}{=}2e^{-1}\neq 0.$$

Also $f'(-1)=f''(-1)=0$ $\quad f^{(3)}(-1)=0$

$\xRightarrow[\text{3 ungerade}]{\text{Satz 10.7}}$ f hat kein lokales Extremum in x_0 (Die 3-te Ableitung ist die "erste" Ableitung, die nicht Null ist.

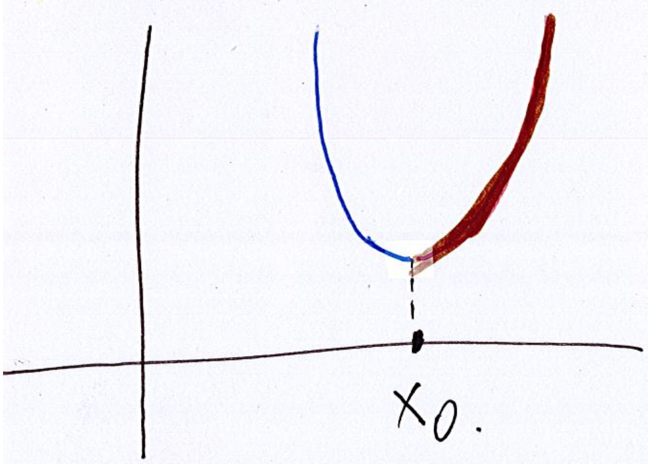
Bem 10.4 Sei $f \in C^2(I)$ mit $f'' \geq 0$ auf I [bzw $f'' \leq 0$ auf I], (dann f heißt konvex [bzw konkav] auf I) Ist $x_0 \in I$ und $f'(x_0) = 0$, dann hat f in x_0 globales Min [bzw globales Max].

Beweis wenn $f'' \geq 0$

$f'' \geq 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f' \text{ monoton wachsend} \\ \text{Aber } f'(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\forall x \geq x_0 \; f'(x) \leq 0 \rightsquigarrow f$ monoton fallend

$\forall x \leq x_0 \; f'(x) \geq 0 \rightsquigarrow f$ monoton wachsend



Also ist $f(x_0)$ Minimum.

Bem Wenn $f'' > 0$ auf I dann $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \neq x_0$

ähnlich, wenn $f'' < 0$

Bsp 10.4.7 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x - x - 1$.

Zeigen Sie: f hat Minimum in 0.

Lösung: $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(0) = 0$.

Aber $f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\xRightarrow[10.4]{\text{Bew}}$

$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (globales Minimun in 0). Also $e^x \geq x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Regeln von de l'Hospital (grob für genaue Formulierung siehe Skript).

f, g dbar, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Ist $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

oder $\text{"}\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{"}$ und $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ dann

$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Bsp 10.4.8 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ da $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ $\xrightarrow{\text{l'Hospital}}$

Aber $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0.$$

Beweisidee im Fall $b \in \mathbb{R}$

"$\frac{0}{0}$", $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $g'(b) \neq 0$.

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{f(b)=0}{\underset{g(b)=0}{=}} \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} =$$

$$= \lim_{x\to b} \frac{\frac{f(x)-f(b)}{x-b}}{\frac{g(x)-g(b)}{x-b}} = \frac{f'(b)}{g'(b)} \overset{f,g\in C^1(\mathbb{R})}{=} \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bsp 10.4.9 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ "$= \frac{\infty}{\infty}$"

Aber $\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$\xRightarrow{\text{l'Hospital}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Bsp 10.4.10 $\lim_{x\to 0+} x\ln x$ "$= 0(-\infty)$"

$$\| $$

$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ "$= \frac{-\infty}{\infty}$"

Aber $\lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0.$$

Erinnerung: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

eine reele Potenzreihe.

$R := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ heißt **Konvergenzradius**

$|x-x_0| < R \Rightarrow$ Potenzreihe konvergent

$|x-x_0| > R \Rightarrow$ Potenzreihe divergent.

$\boxed{\text{Satz 10.9}}$ Wenn $|x-x_0| < R$ gilt

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n a_n (x-x_0)^{n-1}}_{\text{Ableitung von } a_n (x-x_0)^n}$$

Bem: Aus $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ (6.4 (2) v 11).

folgt: die neue Reihe hat den gleichen **Konvergenzradius**

Da $|x-x_0| < R \Rightarrow$ neue Reihe konvergent.

Bsp 10.4.11 Sei $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$

wobei $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie, dass

$g(x) = \arctan(x)$ auf $(-1,1)$.

Lösung **Konvergenzradius**

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[2k+1]{\left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right|}} = 1 \quad \text{da } \lim \sqrt[2k+1]{2k+1} = 1.$$

$$\overset{\text{Satz 10.9}}{\Longrightarrow} \forall x \in (-1,1) \quad g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \overset{\text{Bsp 10.2.4}}{=} (\arctan x)' \xrightarrow{\text{Folgerung 2 des Mittelwertsatzes}}$$

$\exists \ c \in \mathbb{R} \quad g(x) = \arctan x + c \quad \forall x \in (-1,1)$.

Aber $0 = g(0) = \arctan 0 + c = c \Rightarrow c = 0$.

Also $g(x) = \arctan x \quad \forall x \in (-1,1)$.