Sei I Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.
$F: I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ auf I heißt
Stammfunktion von f. Mit

$\int f(x)\,dx$ (unbestimmtes Integral) wird
eine Stammfunktion von f gezeichnet.

Für $a \neq 0$ gilt $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}$ (2)

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Für $a \neq -1$ gilt $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ (in $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$)

Folgerungen der Additionstheoreme 7.10(4)

$\cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta,$

$\sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta.$ Blatt 9 Auf 1.

$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi,\quad \cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\sin^2\varphi.$

$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2},\quad \cos^2\varphi = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}$

$\sin\varphi\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\sin(\varphi+\theta) + \sin(\varphi-\theta)\right)$ (1) | $\cos\varphi\cos\theta = \frac{\cos(\varphi-\theta)+\cos(\varphi+\theta)}{2}$

$\sin\varphi\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi-\theta) - \cos(\varphi+\theta)\right).$

Für Formelsammlung.

Bsp 11.4.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2x) dx \overset{(1)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+2x)+\sin(x-2x)}{2}$

$\overset{\text{da } \sin(-x)=-\sin x}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$

$\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2}\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(-\underbrace{\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3}}_{=0} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \cos 0\right) = -\frac{1}{3}$

Satz 11.4 Partielle Integration: Sei I Intervall und $f, g \in C^1(I)$. Dann

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg' \text{ auf } I \quad (1)$$

Ist $I = [a,b]$, dann

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad (2)$$

Beweis von (2)

$$(2) \iff \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

was stimmt wegen des Hauptsatzes da $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)

Also stimmt (2).

<u>Bsp 11.4.2</u> $\int x e^x dx = \int e^x x \, dx$

$$= \int (e^x)' x \, dx \overset{(1)}{=} e^x \cdot x - \int e^x (x)' dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

<u>Bsp 11.4.3</u> $\int_1^e x \ln x \, dx$

$$= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1^2}{2} \underbrace{\ln 1}_{=0} = \frac{e^2}{2} \quad (2)$$

$$\int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = \underbrace{\int_1^e \frac{x}{2} dx}_{\text{Da } (\ln x)' = \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

Integration durch Substitution: [Satz 11.5]

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $u \in C^1(I)$ mit $u(I) \subseteq I$.

Ist $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$, dann

(i) $\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

(ii) $I = [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(b)) - F(u(a))$

folgt aus (i) und dem Hauptsatz.

zz

$$F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du.$$

folgt aus $F' = f$ und dem Hauptsatz.

Beweis: (i) $(F(u(x)) + c)' = F'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))\, u'(x)$

Kettenregel, Da $F' = f$.

Bemerkung:

(ii) $\longrightarrow$

$$\int_a^b \underbrace{f(u(x))}_{f(u)}\, \underbrace{u'(x)\, dx}_{du} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du \quad (3)$$

$\frac{du}{dx} = u'(x)$.

$u(x)$ ist oft die innere Funktion einer Komposition.

Bsp 11.4.4 $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \underbrace{\left(x^2+1\right)}_{u}^{-\frac{3}{2}} \underbrace{x\,dx}_{\frac{du}{2}}$

Sei $u(x) = x^2+1$

$\Rightarrow du = u'(x)dx$
$= 2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$u(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2+1 = 4$

$u(\sqrt{8}) = (\sqrt{8})^2+1 = 9$

$\overset{(3)}{=} \int_4^9 u^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2} \left.\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{\underbrace{-\frac{3}{2}+1}_{-\frac{1}{2}}}\right|_4^9$

$= -u^{-\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = -\left(9^{-\frac{1}{2}} - 4^{-\frac{1}{2}}\right) = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$

Bsp 11.4.5 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x)' \arcsin(x)\,dx$

Partielle Integration

$x \arcsin(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \underbrace{\left(\arcsin(x)\right)'}_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} dx \quad (1)$

$x \arcsin(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\pi}{6}} - 0 = \frac{\pi}{12} \quad (2).$

$\sin x$	y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
x	$\arcsin(y)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{u}}} \overbrace{x\,dx}^{-\frac{du}{2}} = \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{du}{2}\right).$$

Sei $u(x) = 1-x^2$

dann $du = u'(x)\,dx = -2x\,dx$

$$\Rightarrow \quad x\,dx = \frac{du}{-2}$$

$$u(0) = 1-0^2 = 1$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}}^{1} u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2} \left.\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_{\frac{3}{4}}^{1} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx = \frac{\pi}{12} - \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$