12 Uneigentliche Integrale

(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, integrierbar über jedes Interval $[a,b] \subseteq I$.

(2) $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$, $\alpha < \beta$.

Kann man z.B $\int_\alpha^b$ definieren, wenn $\alpha = -\infty$ oder $f(\alpha)$ nicht definiert?

<u>Def</u> Sei $f: [a, \beta) \to \mathbb{R}$ $\left(f: (\alpha, b] \to \mathbb{R} \right)$.

Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)dx$ $\left(\int_\alpha^b f(x)dx \right)$ heißt <u>konvergent</u>, wenn der Limes

$$\lim_{r \to \beta-} \int_a^r f(x)dx \quad \left(\lim_{r \to \alpha+} \int_r^b f(x)dx \right)$$

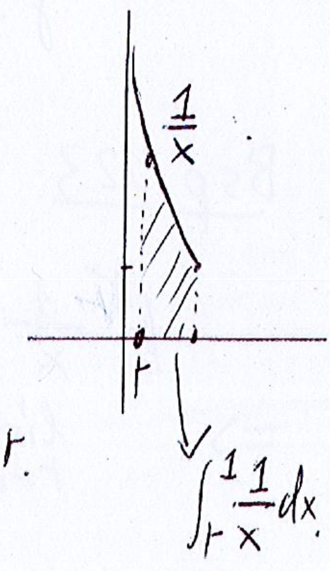
existiert und reel ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^\beta f(x)dx := \lim_{r \to \beta-} \int_a^r f(x)dx.$$

$$\left(\int_\alpha^b f(x)dx = \lim_{r \to \alpha+} \int_r^b f(x)dx. \right)$$

Ansonsten heißt das Uneigentliche Integral <u>divergent</u>.

$\boxed{\text{Bsp 12.1}}$ $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$



$$\int_r^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_r^1 = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln r = -\ln r.$$

Also $\lim_{r \to 0+} \int_r^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{r \to 0+} (-\ln r) = +\infty$.

Also ist das uneigentliche Integral divergent.

Bsp 12.2 $\int_0^1 x^{-\gamma}\,dx, \quad \gamma > 0,\ \gamma \neq 1.$

$$\int_r^1 x^{-\gamma}\,dx = \left.\frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right|_r^1 = \frac{1}{-\gamma+1} - \underbrace{\frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}}_{<0 \text{ wenn } \gamma>1}.$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0+} \int_r^1 x^{-\gamma}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\gamma+1}, & \gamma < 1 \\ \infty, & \gamma > 1. \end{cases}$$

Da $\lim_{r\to 0+} r^{-\gamma+1} = 0$, wenn $\gamma < 1$

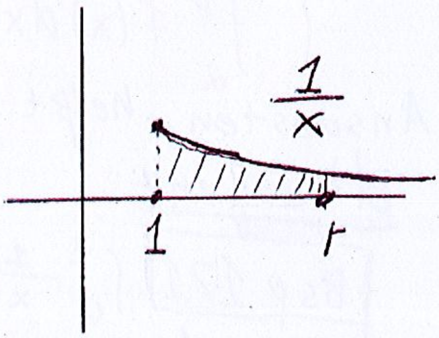
und $\lim_{r\to\infty} r^{-\gamma+1} = \infty$, wenn $\gamma > 1$.

Also $\gamma < 1 \Rightarrow \int_0^1 x^{-\gamma}\,dx$ konvergent

und $\int_0^1 x^{-\gamma}\,dx = \frac{1}{1-\gamma}$.

$\gamma > 1 \Rightarrow \int_0^1 x^{-\gamma}\,dx$ divergent.

Bsp 12.3 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ist divergent



$$\int_1^r \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^r = \ln r.$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x}\,dx = \lim_{r\to\infty} \ln r = \infty.$$

Bsp 12.4 $\int_1^\infty x^{-\gamma}\,dx, \quad \gamma > 0,\ \gamma \neq 1.$

$$\int_1^r x^{-\gamma}\,dx = \left.\frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right|_1^r = \frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} - \frac{1}{-\gamma+1}.$$

$$\gamma > 1 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_1^r x^{-\gamma}\,dx = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Also $\int_1^\infty x^{-\gamma} dx = \frac{1}{\gamma - 1}$ (konvergent.

$\gamma < 1 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} = \infty$. Also ist

$\int_1^\infty x^{-\gamma} dx$ divergent.

Zusammenfassung. Sei $\gamma > 0$, dann

$\int_1^\infty x^{-\gamma} dx \left(= \int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx\right)$ konvergent $\Longleftrightarrow \gamma > 1$.

$\int_0^1 x^{-\gamma} dx \left(= \int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx\right)$ konvergent $\Longleftrightarrow \gamma < 1$.

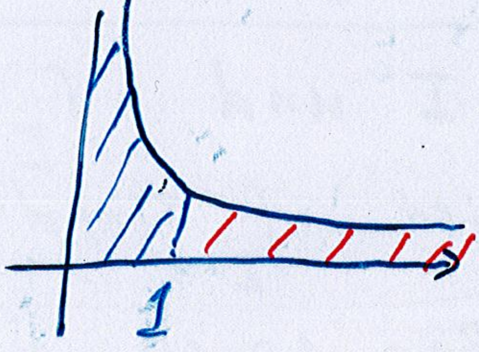
Diese zwei Aussagen kann man direkt in der Klausur verwenden.

Def 12.1. Sei $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $\alpha\in\{-\infty\}\cup\mathbb{R}$ $\beta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ heißt **konvergent** $\Leftrightarrow$ $\exists c\in(\alpha,\beta)$ so dass **beide** $\int_\alpha^c f(x)dx$, $\int_c^\beta f(x)dx$ konvergent sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

und die Definition hängt nicht von c ab. Ansonsten heißt $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ divergent.

Bsp 12.5 $\int_0^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$, $\gamma>0$



$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$,

divergent wenn $\gamma\geq 1$ | divergent wenn $\gamma\leq 1$.

Also für kein $\gamma>0$ sind beide Integrale konvergent

Deshalb ist $\int_0^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$, $\gamma>0$ divergent $\forall\gamma>0$.

Def 12.2 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $\int_I f(x)\,dx$ heißt **absolut konvergent** falls $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent ist.

Satz 12.1 $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int_I f(x)\,dx$ konvergent und $\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$.

Majorantenkriterium Ist $|f| \leq g$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ konvergent dann ist $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent.

Minorantenkriterium Ist $f \geq g \geq 0$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ divergent dann ist $\int_I f(x)\,dx$ divergent.

Bsp 12.6) Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergent ist (Hinweis: $|\sin x| \leq |x|$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$).

(wird nächste Woche gelöst werden).