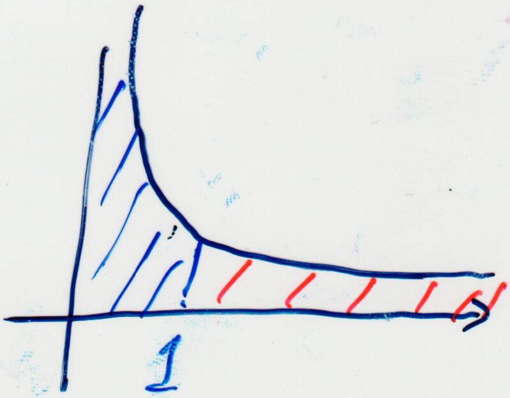
Def 12.1. Sei $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ $\alpha\in\{-\infty\}\cup\mathbb{R}$ $\beta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ heißt <u>konvergent</u> $\Leftrightarrow$ $\exists c\in(\alpha,\beta)$ so dass <u>beide</u> $\int_\alpha^c f(x)dx$, $\int_c^\beta f(x)dx$ konvergent sind. In diesem Fall setzt man
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$
und die Definition hängt nicht von c ab. Ansonsten heißt $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ divergent.

Bsp 12.5 $\int_0^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$, $\gamma>0$



$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$,

$\downarrow$ divergent wenn $\gamma\geq 1$

$\downarrow$ divergent wenn $\gamma\leq 1$.

Also für kein $\gamma>0$ sind beide Integrale konvergent

Deshalb ist $\int_0^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$, $\gamma>0$ divergent $\forall\gamma>0$.

Def 12.2 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $\int_I f(x)\,dx$ heißt <u>absolut konvergent</u> falls $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent ist.

Satz 12.1 $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int_I f(x)\,dx$ konvergent und $\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$.

<u>Majorantenkriterium</u>. Ist $|f| \leq g$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ konvergent dann ist $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent.

<u>Minorantenkriterium</u> Ist $f \geq g \geq 0$ auf I und $\int_I g(x)\,dx$ divergent dann ist $\int_I f(x)\,dx$ divergent.

Bsp 12.6| Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergent ist (Hinweis: $|\sin x| \leq |x|$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$).

Lösung: z.z. beide $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ sind konvergent.

(1) $\Rightarrow$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ auf $(0,1]$, und $\int_0^1 1\,dx = 1 < \infty$ deshalb nach Majorantenkriterium ist $\int_0^1 \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ konvergent $\xRightarrow{\text{Satz 12.1}}$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ konvergent.

Es gilt $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ auf $(1,\infty)$ aber $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ divergent also liefert das Majorantenkriterium keine Entscheidung.

Sei $r > 0$ $\int_1^r \frac{\sin x}{x}dx = \int_1^r (-\cos x)' \frac{1}{x}dx$

$$\overset{\text{Partielle Integration}}{=} -\cos x \frac{1}{x}\Big|_1^r - \int_1^r (-\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)' dx$$

$$= \left(-\cos r \frac{1}{r} + \cos 1\right) - \int_1^r \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Also $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x} dx$

$= \lim_{t\to\infty} \left(\cos 1 - \frac{\cos t}{t}\right) - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx.$

$= \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx.$ (2)

Aber $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ auf $[1, \infty)$

und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ist konvergent

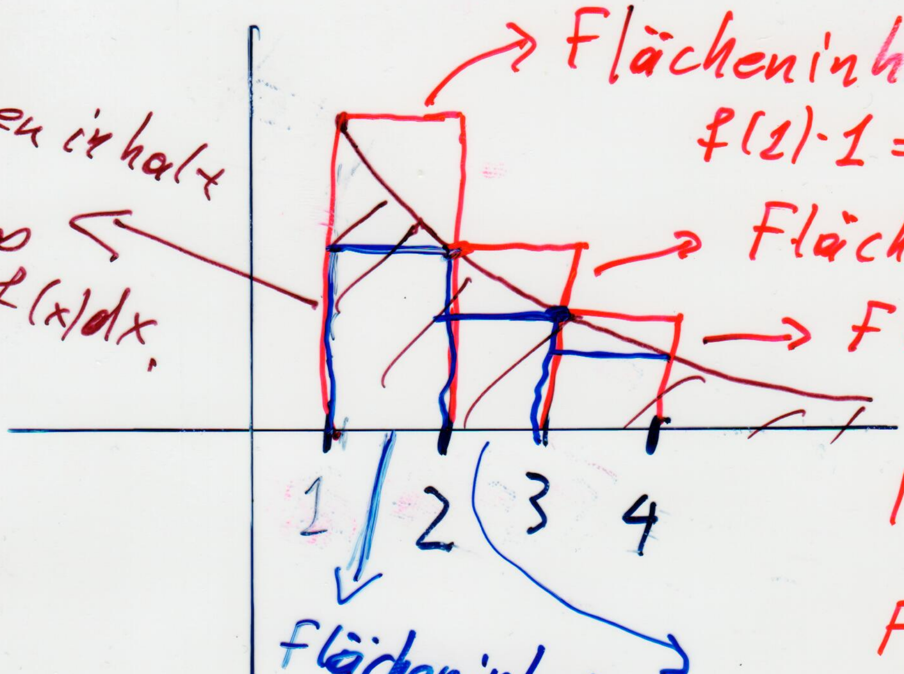
deshalb ist nach Majorantenkriterium $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ konvergent.

Also folgt aus (2), dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergent ist. Da $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ auch konvergent folgt $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ auch konvergent.

Satz 12.2 Sei $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend. Dann $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent $\iff \sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergent.

"Beweisidee":

$$\sum_{n=2}^\infty f(n) \text{ "}\leq\text{" } \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ "}\leq\text{" } \sum_{n=1}^\infty f(n). \quad (*)$$



Flächeninhalt $F_2 = \int_1^\infty f(x)\,dx$.

Flächeninhalt $f(1)\cdot 1 = f(1)$

Flächeninhalt $f(2)$

Flächeninhalt $f(3)$

Insgesammt $F_3 = \sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Flächeninhalt $f(2)$

Flächeninhalt $f(3)$

Insgesammt $F_1 = \sum_{n=2}^\infty f(n)$.

Aus der Skizze folgt

$$F_1 \leq F_2 \leq F_3 \implies (*) \implies \text{Satz 12.2.}$$

Bsp 12.7 Sei $s>0$. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $s>1$ (für Formelsammlung).

Lösung: $f:[1,\infty) \to [0,\infty)$ $f(x) = \frac{1}{x^s}$ ist monoton fallend. Also nach Satz 12.2

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ konvergent.

Aber $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ also

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ konvergent

$\Leftrightarrow$ $s>1$.

Bsp 12.8 Für welche $\alpha > 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$?

Lösung $f:[2,\infty) \to (0,\infty)$ $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ ist monoton fallend da $g:[2,\infty) \to (0,\infty)$ $g(x) = x(\ln x)^{\alpha}$ positiv ist und monoton wachsend als Produkt monoton wachsender Funktionen.

Also $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ konvergiert $\Longleftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}\,dx$ konvergiert

(Das kann man ähnlich wie Satz 12.2 zeigen).

Abet $\int_2^{t} \frac{1}{x(\underbrace{\ln x}_{u})^{\alpha}}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{du}{u^{\alpha}}$

$$\left(\begin{array}{l} u(x) = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx. \\ u(2) = \ln 2, \quad u(t) = \ln t \end{array} \right)$$

Für $\alpha = 1$ gilt $\int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{du}{u^{\alpha}} = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln t} = \ln(\ln t) - \ln(\ln 2)$

Also $\lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x(\ln x)}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)\right) = \infty$

Also ist $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)}\,dx$ divergent und deshalb

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ auch divergent.

Für $\alpha \neq 1$ gilt $\int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{du}{u^{\alpha}} = \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{\ln 2}^{\ln t}$

$$= \frac{(\ln t)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \longrightarrow \begin{cases} \infty, & \text{wenn } \alpha < 1 \\ \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \text{wenn } \alpha > 1 \end{cases}$$

Also $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ konvergiert wenn $\alpha > 1$ und divergiert wenn $\alpha < 1$. Deshalb bekommen wir

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ konvergent $\Longleftrightarrow \alpha > 1$