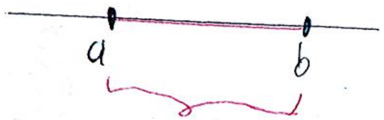
2.6 Reelle und komplexe Zahlen

Der Betrag: Für $a\in\mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & a\ge 0\\ -a, & a<0\end{cases}$ der Betrag von a.

Bsp 2.6.1: $|-4| = -(-4) = 4$, da $-4<0$.

Es gilt $|a|=|-a|$ für alle $a\in\mathbb{R}$, also auch $|a-b|=|b-a|$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$. $|a-b|$ ist der Abstand von a und b auf der Zahlengeraden.



$|a-b|$: Länge der Strecke

z.B $3-(-2)=5$

Regeln: Seien $a,b,c\in\mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|a|\ge 0$; (2) $|a|=0 \iff a=0$;

(3) $|ab|=|a|\cdot|b|$,

$-c\le a\le c \iff$

(4) $\pm a\le|a|$ und $(|a|\le c \iff (a\le c$ und $-a\le c))$;

(5) $|a+b|\le|a|+|b|$ Dreiecksungleichung.

(6) $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$ umgekehrte Dreiecksungleichung.

Beweis von (5), (6) angenommen (4).

(5) Wenn $a+b\ge 0$ dann $|a+b| = a+b \le |a|+|b|$.

weil nach (4) $a\le|a|$ und $b\le|b|$

Analog wenn $a+b\le 0$ dann $|a+b|=(-a)+(-b)\le|a|+|b|$.

(6). Nach (5) ist $|a|=|a-b+b|\le|a-b|+|b|$.

sehr gewöhnlicher Trick.

$\Rightarrow \quad |a|-|b|\le|a-b|$. (*)

Wir können die Rolle von a,b vertauschen zu bekommen

$$|b|-|a|\le|b-a|=|b-a|.$$

oder $\quad -(|a|-|b|)\le|a-b|$ (**)

Aus (*), (**) und den zweiten Teil von (4) folgt $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$.

Intuition für die Dreiecksungleichung.

$$|a+b|\le|a|+|b|.$$

$|a|$, $|b|$ sind positive Zahlen die addiert werden. Aber wenn a,b nicht das gleiche Vorzeichen haben werden sie subtrahiert.

Bsp 2.6.2 Zeigen Sie, dass es kein $x\in\mathbb{R}$ gibt mit $|x|+|x-2|=1$.

Lösung: Aus der Dreiecksungleichung folgt

$|x|+|2-x|\ge|x+2-x)|=|2|=2>1$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Da $|x-2|=|2-x|$ folgt, dass $|x|+|x-2|>1$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Bem: Die Regel (4) kann mit einem Beispiel illustriert werden. z.B $|a| \le 2 \iff -2 \le a \le 2$

$|a-0| \le 2$ Der Abstand zwischen a,0 ist ≤ 2

genau dann wenn

a ist zwische $-2, 2$.

Weiter

$$-2 \le a \le 2 \iff (a \ge -2 \text{ und } a \le 2)$$

$$\iff (-a \le 2 \text{ und } a \le 2)$$

weil $a \ge -2 \overset{\text{mit } -1 \text{ multiplizieren}}{\iff} -a \le 2$

dann ändert sich die Richtung der Ungleichung.

z.B $-1 \ge -2 \iff 1 \le 2$.

nuKIT Frage: Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Ungleichung $|a| \le 2$ äquivalent zu.

(1) $a \le 2$

(2) $a \le 2$ und $-a \ge 2$

(3) $a \le 2$ und $-a \le 2$.

(4) $a \ge -2$.

(5) keine der obigen Antworten.

(6) keine Ahnung.

Erklärung Links.