Komplexe Zahlen

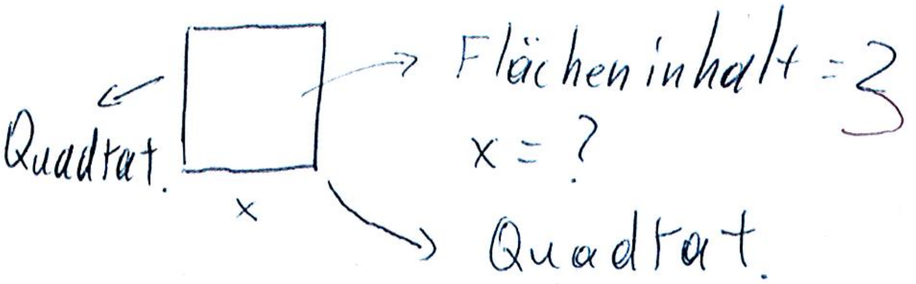
Komplexe Zahlen: reelle Zahlen reichen nicht

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ wurde erst eingeführt.

$x + 5 = 3$ keine Lösung in $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

$-3x = 5$ keine Lösung $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

$x^2 = 3$ keine Lösung in $\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R}$.



$x^2 = -1$ keine Lösung $\rightsquigarrow \mathbb{C}$.

Menge der komplexen Zahlen.

2.6 Komplexe Zahlen

Wir betrachten

$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

$b^2-4ac \geq 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b^2-4ac<0.$

Keine Lösung $x\in\mathbb{R}$ da $\sqrt{b^2-4ac}$ nicht definiert

Wir führen eine Zahl i ein, mit $\boxed{i^2=-1}$

Dann $\left(i\sqrt{4ac-b^2}\right)^2 = i^2(4ac-b^2) \overset{i^2=-1}{=\!=} b^2-4ac$

Also hat (1) die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Sei $\mathbb{C} = \{x+iy : x,y\in\mathbb{R}\}$.

Menge der komplexen Zahlen.

Man kann komplexe Zahlen wie reelle Zahlen addieren / multiplizieren.

Bsp 2.6.4 $(1+3i)+(4+5i) = (1+4)+(3+5)i = 5+8i.$

$(1+i)(2+3i) = 2+3i+2i+3i^2 \overset{\text{Da } \boxed{i^2=-1}}{=\!=} -1+5i.$

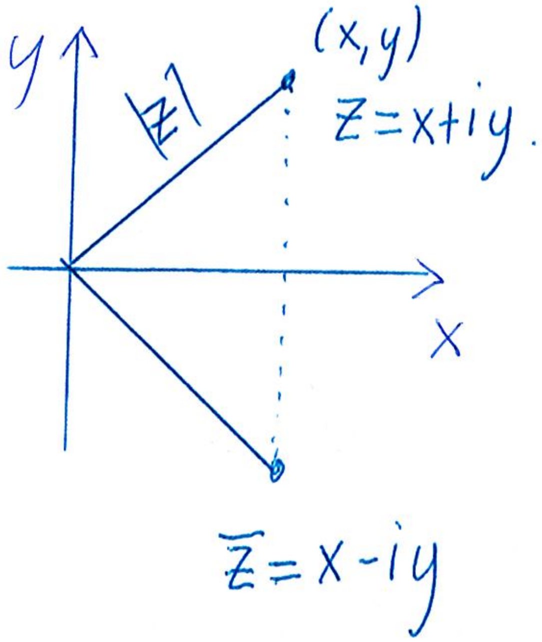
Sei $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{Re} z$ ("Realteil von z")

$\operatorname{Im} z$ ("Imaginärteil von z.

Man kann z mit dem Punkt (x,y) in $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

xy-Ebene



$$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$$

"Betrag von z" (Abstand zwischen 0 und z.

$$\bar{z} := x - iy.$$

konjugiert komplexe Zahl.

Dann $|z| = |\bar{z}|$.

$$\left.\begin{aligned} z + \bar{z} &= (x+iy) + (x-iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z. \\ z - \bar{z} &= (x+iy) - (x-iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Bsp 2.6.5 $z = 3 - 4i$. Dann $\bar{z} = 3 + 4i$

$\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -4$ (und nicht $-4i$).

$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$, (und nicht $\sqrt{3^2 + (-4i)^2}$!!!

$$z = x + iy \Rightarrow z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2$$

$$\overset{\text{Da } i^2 = -1}{=} x^2 + y^2 = |z|^2 \Rightarrow \boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2} \quad (*)$$

Also $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} \overset{(*)}{=} \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

<u>Bsp. 2.6.5:</u> $\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i}{2^2 - i^2} = \dfrac{2-i}{5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} i.$$

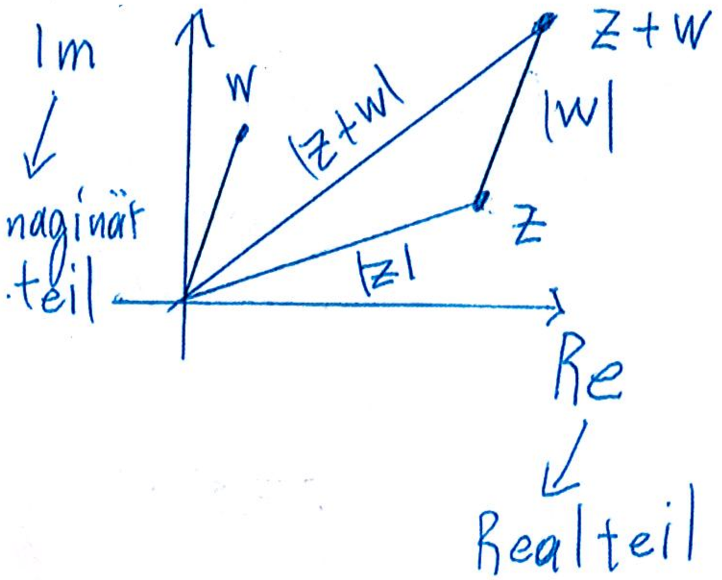
Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Dann

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(3) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

(4) $||z| - |w|| \leq |z - w|$ (Umgekehrte Dreiecksungleichung).



(3) sagt geometrisch: gerade aus ist immer der kürzeste Weg.

Beweis von (1), (2) folgt.

Beweis: Ist $z = x + iy$, $w = u + iv$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

dann $z + w = x + u + i(y+v) \Rightarrow \overline{z+w} = x + u - i(y+v)$.

und $\bar{z} = x - iy$, $w = u - iv \Rightarrow \bar{z} + \bar{w} = x + u - i(y+v)$

Also $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Ähnlich zeigt man $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

(2) $z \cdot w = (x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$.

$\Rightarrow |z \cdot w| = \sqrt{(xu-yv)^2 + (xv+yu)^2} =$

$\sqrt{x^2u^2 + y^2v^2 - 2xuyv + x^2v^2 + y^2u^2 + 2xvyu}$

$= \sqrt{x^2u^2 + x^2v^2 + y^2u^2 + y^2v^2} = \sqrt{x^2(u^2+v^2) + y^2(u^2+v^2)}$

$= \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} = \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{u^2+v^2}$

$= |z|\,|w|$.