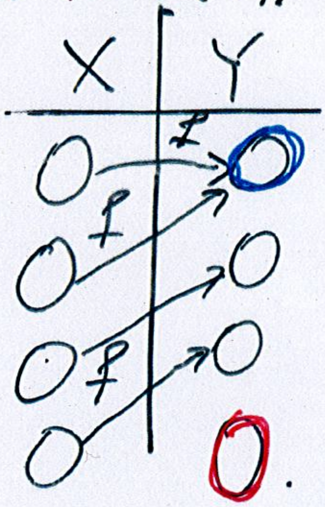
3 Funktionen

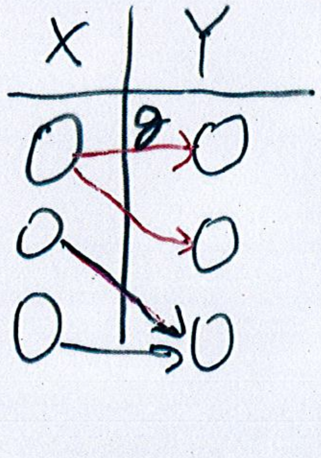
3.1 zum Begriff der Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine **Funktion**/**Abbildung** f ordnet zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu. Dann schreibt man $y = f(x)$. Schreibweisen $f: X \to Y$

$x \mapsto f(x)$.



Möglicherweise gibt es Elemente in Y, auf die kein x abgebildet wird, oder auf die mehrere Elemente von x abgebildet werden.



Hier wäre g keine Funktion, weil wein ein Element von X auf mehrere Elemente von Y abgebildet wird.

X heißt **Definitionsbereich** von f

Y heißt **Wertebereich**. von f

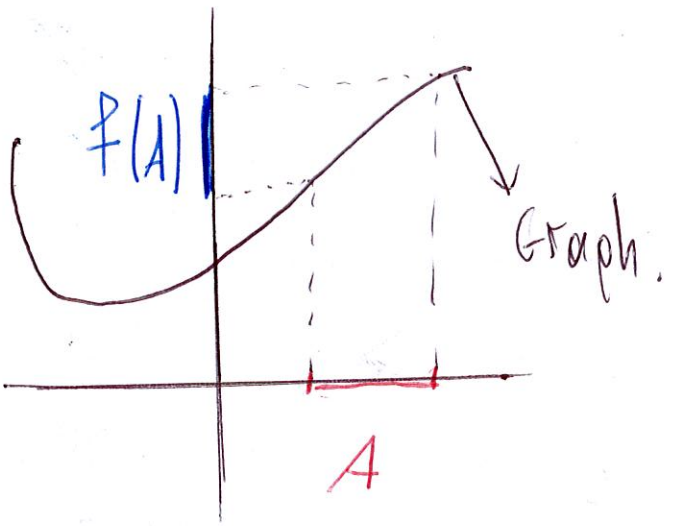
Für $A \subseteq X$ heißt $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.
Bild von A unter f und für $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B unter f. $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

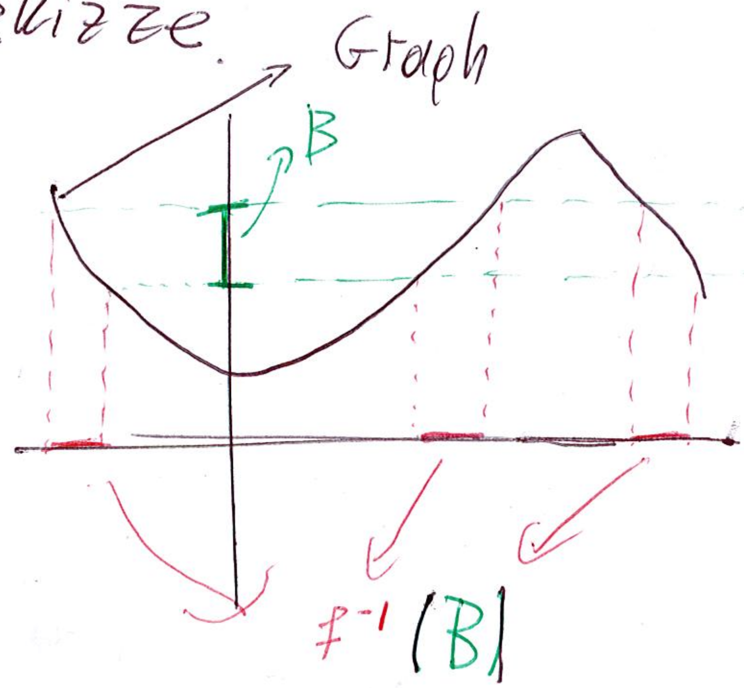
heißt Bild von f. $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ heißt Graph von f.

Grobe unmathematische Erklärung

Das Bild von A beantwortet "wo A Menge abgebildet wird" und das Urbild von B beantwortet "welche Menge auf B abgebildet wird.

Illustration mit Skizze.





Bsp 3.1.1 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$.

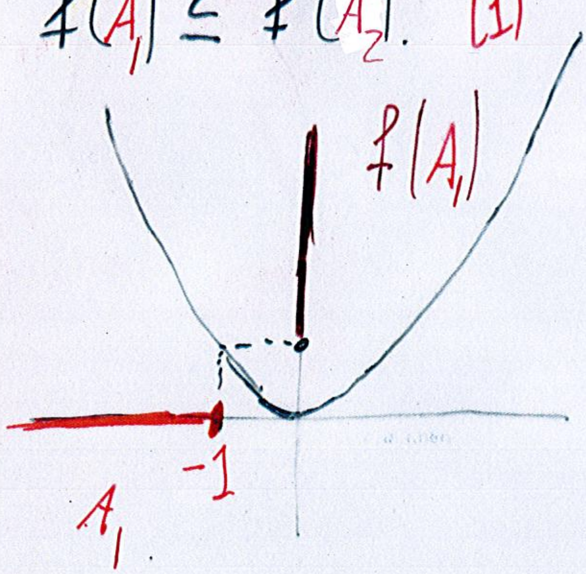
(a) Ist der Wertebereich von f gleich wie das Bild von f

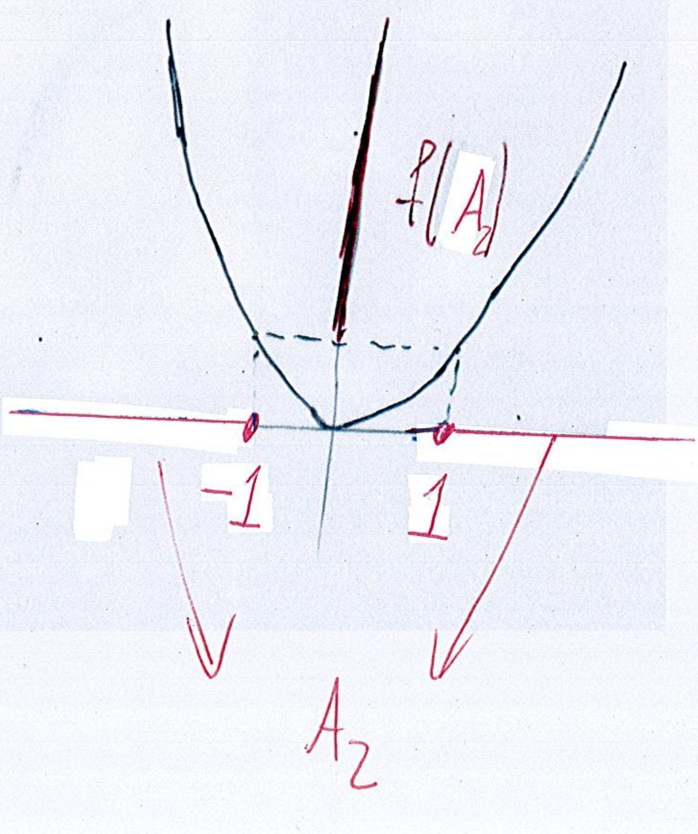
(b) Seien $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Vergleichen Sie $f(A_1)$, $f(A_2)$.

(c) Sei $B = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 9\}$ Bestimmen Sie das Urbild von B.

Lö: (a) -1 ist nicht in Bild von f, da $f(x) = x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Also das Bild von f ist nicht gleich wie der Wertebereich $\mathbb{R}$ von f.

(b) Ist $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ und $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Also $A_1 \subseteq A_2$ deshalb $f(A_1) \subseteq f(A_2)$. (1)





Wir zeigen jetzt, dass $f(A_2) \subseteq f(A_1)$.

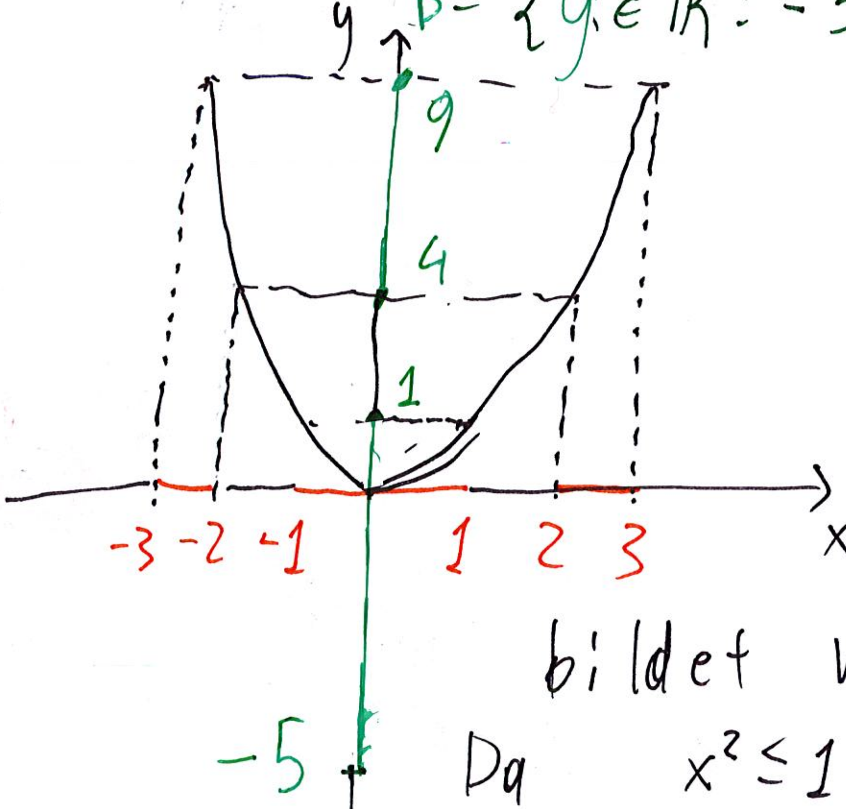
Sei $x \in A_2$. Ist $x < 0$ dann $x \leq -1$ also $x \in A_1$ deshalb $f(x) \in f(A_1)$.

Ist $x \geq 0$ dann $x \geq 1$ also $-x \leq -1$ deshalb $-x \in A_1$. Aber dann $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x) \in A_1$. Also wir haben gezeigt: Ist $x \in A_2$ dann $f(x) \in f(A_1)$.

Also $f(A_2) \subseteq f(A_1)$. (2)

Aus (1), (2) folgt $f(A_1) = f(A_2)$.

$B = \{y \in \mathbb{R} : -5 \leq y \leq 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : 4 \leq y \leq 9\}$.



Dann

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in C\}$.

Also besteht $f^{-1}(C)$ auf allen Punkten, die in B abgebildet werden (siehe Skizze).

Da $x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1$

und $4 \leq x^2 \leq 9 \iff 2 \leq |x| \leq 3$ folgt, dass

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : (|x| \leq 1) \vee (2 \leq |x| \leq 3)\}$.

1) Definition: 3.1.

Sei $f: X \to Y$ eine Funktion.

a) f heißt injektiv, falls gilt

$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

d.h. falls es zu jedem Element genau ein Urbild gibt. Äquivalent, falls gilt

$\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

b) f heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt d.h. falls jedes $y \in Y$ von f getroffen wird.

(c). f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bsp 3.1.2 a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Ist nicht injektiv weil z.B $f(2) = 4 = f(-2)$. Ist nicht surjektiv weil es kein x gibt mit z.B $f(x) = -1$ weil $x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 2x$ ist bijektiv weil. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ also ist g injektiv. Zusätzlich ist $y \in \mathbb{R}$ dann $y = g(2y)$ also y ist in Bild von g. Also ist Bild von g $\mathbb{R}$ und deshalb ist g surjektiv.

Da g injektiv und surjektiv ist ist g bijektiv.

<u>3.2 Komposition</u>: Sind $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ Funktionen, so definiert

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \to g(f(x))$$

eine Funktion ("g nach f") die <u>Komposition</u> oder <u>Hintereinanderausführung</u> von f und g.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

<u>Bsp 3.2.1</u> Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = e^x$ dann

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$

und

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2}$

Also allgemeine $f \circ g \neq g \circ f$. Wenn X, Y, Z nicht gleich sind, kann es sein, dass $f \circ g$ nicht definiert werden kann.