<u>Satz 3.1</u> Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ Funktionen, so gilt.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$ (Assoziativitat)

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & Z \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"] \arrow[r, "h\circ g\circ f"'] & W
\end{tikzcd}$$

(wegen der Assoziativität kann man die Klammern weglassen)

3.3 Die Umkehrabbildung

Ist $f: X \to Y$, $x \mapsto y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1}: Y \to X$, $y \mapsto x$ die Umkehrabbildung (oder Umkehrfunktion) von f.

<u>grobe</u> Erklärung: Die Umkehrabbildung beantwortet die Frage: Können wir $y = f(x)$ bezüglich x lösen. Oder: Können wir von y das x bekommen?

Bsp. Sei g wie im Bsp 3.2 b) also $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$. Dann $g^{-1}(2x) = x$. $\forall x \in \mathbb{R}$.
Insbesondere, wenn wir x mit $\frac{x}{2}$ ersetzen, bekommen wir $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Satz 3.3: Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ bijektiv, so ist $g \circ f: X \to Z$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}: Z \to X$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[dr, shift left, "g \circ f"'] & Y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift left, "g"] \\
 & Z \arrow[u, shift left, "g^{-1}"] \arrow[ul, shift left, "f^{-1} \circ g^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Beispiel 3.3.1. Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge, so heißt die Funktion $X \to X$, $x \mapsto x$ die Identität auf X. Schreibweise: Id_X, id_X. Id_X ist bijektiv und

$$(Id_X)^{-1} = Id_X.$$

Bemerkung 3.1 Ist $g: X \to Y$ bijektiv, so gilt

$$g \circ g^{-1} = id_Y, \quad g^{-1} \circ g = id_X.$$

Bsp 3.3.2 Sei $f: (3,\infty) \to (1,\infty)$. $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und bestimmen Sie f^{-1}.

Lö: $f(x) = \frac{x-3+6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$. Ist $f(x_1) = f(x_2)$ dann $\cancel{1} + \frac{6}{x_1-3} = \cancel{1} + \frac{6}{x_2-3} \Rightarrow \frac{1}{x_1-3} = \frac{1}{x_2-3}$.

$\Rightarrow x_2 - 3 = x_1 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$. Also ist f injektiv. Nun zu zeigen f ist surjektiv.

Da $f(x) = 1 + \frac{6}{x-3} > 1$, wenn $x > 3$ ist das Bild von f tatsächlich in $(1,\infty)$.

Sei jetzt $y > 1$. z.z. (zu zeigen) $\exists\ x \in (3,\infty)$ mit $f(x) = y$. In der Tat da $f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \frac{6}{x-3} = y \Leftrightarrow y - 1 = \frac{6}{x-3}$ $\overset{y>1}{\Leftrightarrow} x - 3 = \frac{6}{y-1} \Leftrightarrow x = 3 + \frac{6}{y-1}$ (1).

und $3 + \frac{6}{y-1} > 3$ für $y > 1$ gibt es genau ein $x > 3$ mit $f(x) = y$. Also ist f surjektiv (und injektiv) $\to$ bijektiv

Wegen (1) gilt $f^{-1}(y) = 3 + \frac{6}{y-1}$

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Wir setzen

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall.

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall.

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall.

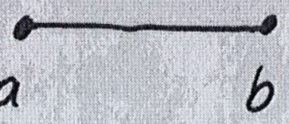
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ " "

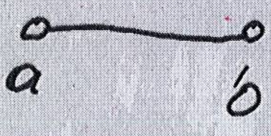
$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$. $\qquad [a,a] = \{a\}$

$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. $\qquad (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.

$(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

$(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.

$[a,b]$


(a,b)


$[a,b)$


4. Die reellen Zahlen Gründlicher

Man kann die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch Axiome einführen, d.h durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen. Wir nehmen dann $\mathbb{R}$ als mit diesen Axiomen gegeben an.

4.1 Körperaxiome: Es gibt Verknüpfungen $+: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a+b$, $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(a,b)\mapsto a\cdot b$. mit

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt $(a+b)+c = a+(b+c)$, $a(bc)=(ab)c$.

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + ac$, $a\cdot b = b\cdot a$

$a+b=b+a$.

$\exists\ 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \quad a+0=a.$

$\exists\ 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \quad a\cdot 1 = a.$

$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists\ -a \in \mathbb{R} : \ a+(-a)=0.$

$\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R} : \ a\cdot a^{-1} = 1.$

Schreibweisen: $a-b := a+(-b)$

falls $b \neq 0$ $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

4.2 Anordnungsaxiome: In $\mathbb{R}$ ist eine Ordnung "$\leq$" mit folgenden Eigenschaften

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt

$a \leq b$ oder $b \leq a$ (insbesondere $a \leq a$)

$(a \leq b$ und $b \leq c) \Rightarrow a \leq c$.

$(a \leq b$ und $b \leq a) \Rightarrow a = b$.

$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

$(a \leq b$ und $c \geq 0) \Rightarrow ac \leq bc$.

Schreibweisen $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$

$a < b \Leftrightarrow (a \leq b$ und $a \neq b)$

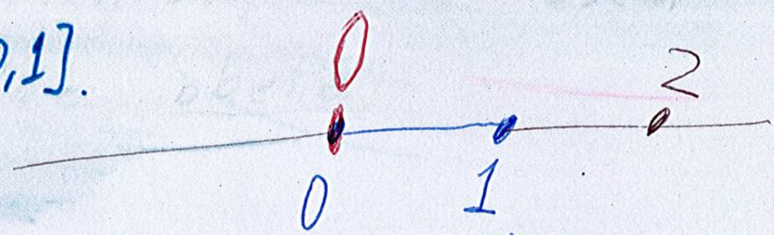
$b > a \Leftrightarrow a < b$.

4.3 Supremum und Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$. (M hat Elemente. M heißt nach oben [bzw. nach unten] beschränkt wenn $\exists C \in \mathbb{R}$ mit $a \leq C$ [bzw. $a \geq C$] $\forall a \in M$.

In diesem Fall heißt C eine obere [bzw untere] Schranke von M.

Bsp 4.3.1 $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ ist nach oben beschränkt weil $a \le 2 \quad \forall a \in [0,1]$ Ist auch nach unten beschränkt weil $0 \le x \quad \forall x \in [0,1]$.



2 [bzw 0] ist eine obere [bzw. untere] Schranke von $[0,1]$.

Eine obere [bzw. untere] Schranke C von M mit $C \in M$ heißt **Maximum** [bzw. **Minimum**] von M und wird mit $\operatorname{Max} M$ [bzw. $\operatorname{Min} M$] bezeichet. Wenn $\operatorname{Max} M$ [bzw. $\operatorname{Min} M$] existiert, dann ist es eindeutig.

Bsp 4.3.2 Im Bsp 4.3.1 ist 0 eine untere Schranke von $[0,1]$ und $0 \in [0,1]$ also $0 = \operatorname{Min} [0,1]$.

Bsp 4.3.3

8

Wir betrachten die Mengen

$C = [0,1] \cup [4,\infty)$ und $A = (\mathbb{R} \setminus C) \cup [2,3]$.

Wählen Sie alle richtigen Aussagen für

A, C

(1) A ist nach oben beschränkt. ✓

(2) A ist nach unten beschränkt. ✗

(3) A hat ein Maximum ✗

(4) 5, 10 sind obere Schränken von A ✓

(5) Es gibt die kleinste obere Schranke von A. ✓

Das Bsp wird am Anfang der nächsten Analysis Vorlesung gelöst werden.