Bsp 4.3.3

Wir betrachten die Mengen

$C = [0,1] \cup [4,\infty)$ und $A = (\mathbb{R} \setminus C) \cup [2,3]$.

Wählen Sie alle richtigen Aussagen für A, C

(1) A ist nach oben beschränkt. ✓

(2) A ist nach unten beschränkt. ✗

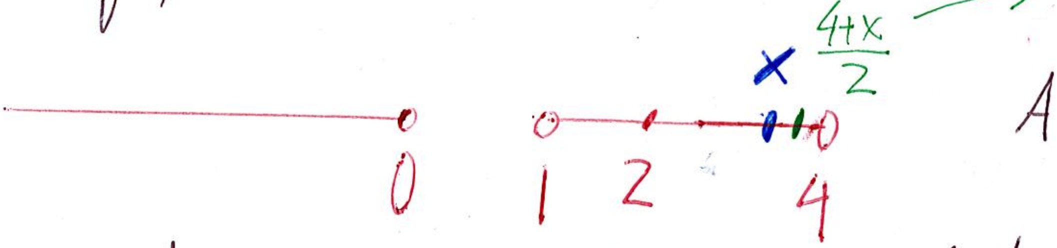
(3) A hat ein Maximum ✗

(4) 6, 10 sind obere Schränken von A ✓

(5) Es gibt die kleinste obere Schranke von A. ✓

Bsp 4.3.3 Lö: $C=[0,1]\cup[4,\infty)$. Also $\mathbb{R}\setminus C = (-\infty,0)\cup(1,4)$, und da $[2,3]\subset \mathbb{R}\setminus C$ folgt, dass $A=(-\infty,0)\cup(1,4)$.

Mittelwert von $x,4$.



Also $a\leq 5$ $\forall a\in A$ und $a\leq 10$ $\forall a\in A$. Also stimmen die Aussagen (1),(4).

(2) Ist falsch. Ist $x\geq 0$ dann ist x keine untere Schranke von A, da $x>-1$ und $-1\in A$. Ist $x<0$ dann ist auch x keine untere Schranke, von A weil $x-1<x$ und $x-1<0 \Rightarrow x-1\in A$. Also hat A keine untere Schranke.

(3) Wäre $x=\operatorname{Max} A$, dann $x\in A$ also $x<4$. (und $x\geq 3>2$). Also $x+4<4+4 \xRightarrow[\text{teilen}]{\text{durch 2}}$ $\frac{4+x}{2}<4$. (1). Ähnlich $x<4 \Rightarrow$ $x+x<4+x \xRightarrow[\text{teilen}]{\text{durch 2}} x<\frac{4+x}{2}$ (2) Also $2<x<\frac{4+x}{2}<4$. Also $\frac{4+x}{2}\in A$ und also

aus (2) folgt x ist keine obere Schranke von A, was Widerspruch zu $x = \text{Max } A$ ist.

(5) Ist richt. Denn 4 ist eine obere Schranke von A aber wenn $x < 4$ ist x keine obere Schranke von A wegen der Argumentation in (3). Also ist 4 die kleinste obere Schranke von A.

Dass A kein Maximum hat aber ~~die~~ kleinste obere Schranke hat führt zu

Def 4.1 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

(a) Ist c obere Schranke von M, so dass $a \geq c$ für jede obere Schranke a von M dann heißt c supremum von M ($c = \sup M$, kleinste obere Schranke von M).

(b) Ist d eine unter Schranke von M, so dass $b \leq d$ für jede untere Schranke b von M dann heißt d infimum von M ($d = \inf M$, größte untere Schranke).

Bsp 4.3.4. Ist $A=(-\infty,0)\cup(1,4]$ (wie im Bsp 4.3.3) so gilt nach Aussage (5) $4=\sup A$.

<u>Bem</u>: Sei $M\subseteq\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$. Hat M ein ~~e~~ Maximum [bzw. Minimum] dann hat M Supremum [bzw. Infimum] und $\operatorname{Max} M=\sup M$. [bzw. $\operatorname{Max} M=\inf M$].

Es ist so dass $\sup M$, $\inf M$ ist eindeutig, wenn es existiert. Existiert es aber immer?

4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

$$\boxed{\text{(A15). Ist } M\subseteq\mathbb{R},\ M\neq\emptyset \text{ nach oben beschränkt dann hat } M \text{ ein Supremum.}}$$

<u>Folgerung 4.1</u> Sei $M\subseteq\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$ nach unten beschränkt. Dann existiert das $\inf M$.

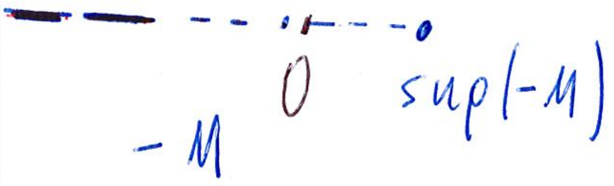
<u>Beweisidee</u>: $-M:=\{-x: x\in M\}$ ist nach oben beschränkt also es gibt $\sup(-M)$. Dann $\inf M=-\sup(-M)$, wobei

$\sup(-M)$ existiert, weil $-M$ nach oben beschränkt ist.

$\inf(M) = -\sup(-M)$.

Bsp $M = [1,3]$

$\inf M = 1$



$-M = [-3,-1]$

$\sup(-M) = -1$.

__Def 4.2__ Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ heißt __beschränkt__ wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

__Bsp 4.4.1__ Die Menge $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$= \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ ist beschränkt.

Allerdings gilt $\sup(M) = 1$, $\inf(M) = 0$.

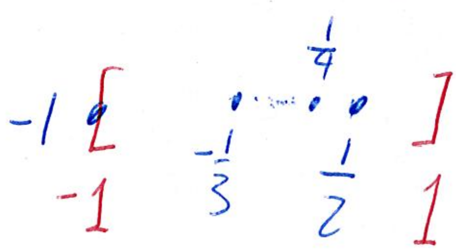
$\max(M) = 1$ aber M hat kein Minimum.

Bem 4.3 $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq 0$ ist beschränkt genau dann wenn $\exists\, \gamma > 0$ mit $M \subseteq [-\gamma, \gamma]$.

Bsp 4.4.2

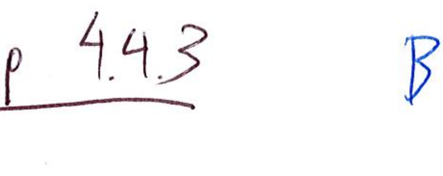
Sei $M = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ist beschränkt weil $M \subset [-1, 1]$.

$M = \left\{ \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$



Satz 4.1 Sei $\emptyset \subseteq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Ist A nach oben [bzw. nach unten] beschränkt, dann so ist B und $\sup B \leq \sup A$ [bzw. $\inf B \geq \inf A$].

Bsp 4.4.3 $B = (2, 4)$, $A = (1, 5)$.



$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$$

Im Benz sind wir 200 Leute. Jede Person hat ein Glas wein. Wir stoßen alle mit einander einmal an. Wie viele Anstoße gibt es.

(1) $200 \cdot 199$ (3) $1+2+\dots+200$ (5) keine der obigen Antworten.

(2) $\frac{200 \cdot 199}{2}$ (4) $1+2+\dots+199$

Formulieren Sie die Frage mathematisch mit Hilfe der Menge $A=\{1,2,\dots,200\}$.

<u>Lö</u>: Jede von den 200 Personen stoßt mit 199 Personen an. Dass gibt $200 \cdot 199$ aber mit jedem Anstoßen 2 Mal gezählt deshalb gibt es $\frac{200 \cdot 199}{2}$ Anstoße.

Alternativ: Die erste Person stoßt mit den anderen 199 Personen. Dann die zweite mit den anderen 198 usw also $199+198+\dots+1$ Anstoße. (Formulierung mit Mengen morgen).