4.6 Natürliche Zahlen.

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. ($\forall$: für alle $\exists$: existiert).

Satz 4.2 (1) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt

d.h $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

(2) $\forall b > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

---

(1) Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt dann gäbe es die Zahl $y = \sup \mathbb{N}$. (Vollständigkeitsaxiom). Dann $y-1$ ist keine obere Schranke, also $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > y-1$. Daraus folgt $n+1 > y$. Also ist y keine obere Schranke (Widerspruch).

---

(2) Da $b > 0$ ist $\frac{1}{b} > 0$ also nach (1) $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b} \Rightarrow b > \frac{1}{n}$.

4.7 Vollständige Induktion

Bsp: Wir wollen zeigen, dass

$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ wahr ist $\forall n \in \mathbb{N}$.

$n=1 \quad 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ ✓

$n=2 \quad 1+2=3=\frac{2\cdot 3}{2}$ ✓

$n=3 \quad 1+2+3=6=\frac{3\cdot 4}{2}$ ✓

Die Aussage stimmt für $n=1$, $n=2$, $n=3$.

Man kann nicht die Aussage für jene einzelne Zahl in $\mathbb{N}$ überprüfen hilfreich ist aber das

Beweisverfahren durch Induktion:

Sei $A(n)$ eine Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$. Wenn gilt: (i) $A(1)$ ist wahr (Induktionsanfang IA).

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr (Induktionsschritt IS).

Dann ist $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bsp 4.7.1 Zeigen Sie $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

(IA) Für $n=1$ ist $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ also stimmt die Aussage für $n=1$.

(IS) Annahme $1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (1) für ein $n \in \mathbb{N}$. (beliebig aber fest).

zu zeigen $1+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

In der Tat $\underbrace{1+\ldots+n}+(n+1) \overset{(1)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

$\left(\frac{n(n+1)}{2} \text{ wegen } (1)\right)$

$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

was zu zeigen war. Also stimmt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

$1 = \frac{1\cdot 2}{2}$

$1+2 = \frac{1\cdot 2}{2} + 2 = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 2}{2}$

$= \frac{(1+2)\cdot 2}{2} = \frac{3\cdot 2}{2}$.

Definition durch Rekursion:

Wenn (1) $G(1)$ definiert ist

(2) $G(n+1)$ definiert ist unter der Voraussetzung, dass $G(1), \ldots, G(n)$ definiert sind,

Dann hat man $G(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ definiert.

Bsp 4.7.2 $n!$ ist definiert durch

$1! = 1$, und $(n+1)! = n!(n+1)$ (Funktion von Matlab. Dann $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

z.B $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Man sagt $0! = 1$.

Summenzeichen/Produktzeichen: Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$.

Wir setzen $\sum_{j=1}^{1} a_j = a_1$, $\prod_{j=1}^{1} a_j = a_1$.

und $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}$, $\prod_{j=1}^{n+1} a_j = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot a_{n+1}$.

Dann $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \ldots + a_n$, $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \ldots a_n$.

Bsp. 4.7.3 $a_j = \frac{1}{j}, \ \forall j \in \mathbb{N}$. Dann

$$\sum_{j=1}^{5} a_j = \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

$$\prod_{j=1}^{4} a_j = \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Wir definieren a^n wie folgt.

$a^1 = a$, und $a^{n+1} = a^n \cdot a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Mal}}.$$