function $z = g(n)$

If $(n == 1)$ $\quad z = 1$

else

$\quad z = n \cdot g(n-1)$.

end;

Hier $(n == 1)$ überprüft die Aussage $n=1$

$z = 1$ bedeutet $z := 1$ (wir definieren z als 1).

$$g(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

da

$g(5) = 5 \cdot g(4)$ (da $5 \neq 1$)

$g(4) = 4 \cdot g(3)$ (da $4 \neq 1$)

$g(3) = 3 \cdot g(2)$ (da $3 \neq 1$)

$g(2) = 2 \cdot g(1)$ (da $2 \neq 1$)

$g(1) = 1$ (da $1 = 1$)

Also $g(2) = 2 g(1) = 2 \cdot 1$, $g(3) = 3 \cdot g(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$g(4) = 4 \cdot g(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$g(5) = 5 \cdot g(4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Wir betrachte die Menge $A_n = \{1, \dots, n\}$.
Die Permutationen von A_n sind alle möglichen Reihenfolgen mit denen die Zahlen 1 bis n schreiben können.

Bsp 4.7.4 Die Menge $A_3 = \{1,2,3\}$ hat 6 Permatationen nämhlich 123, 132, 213, 231, 312, 321.

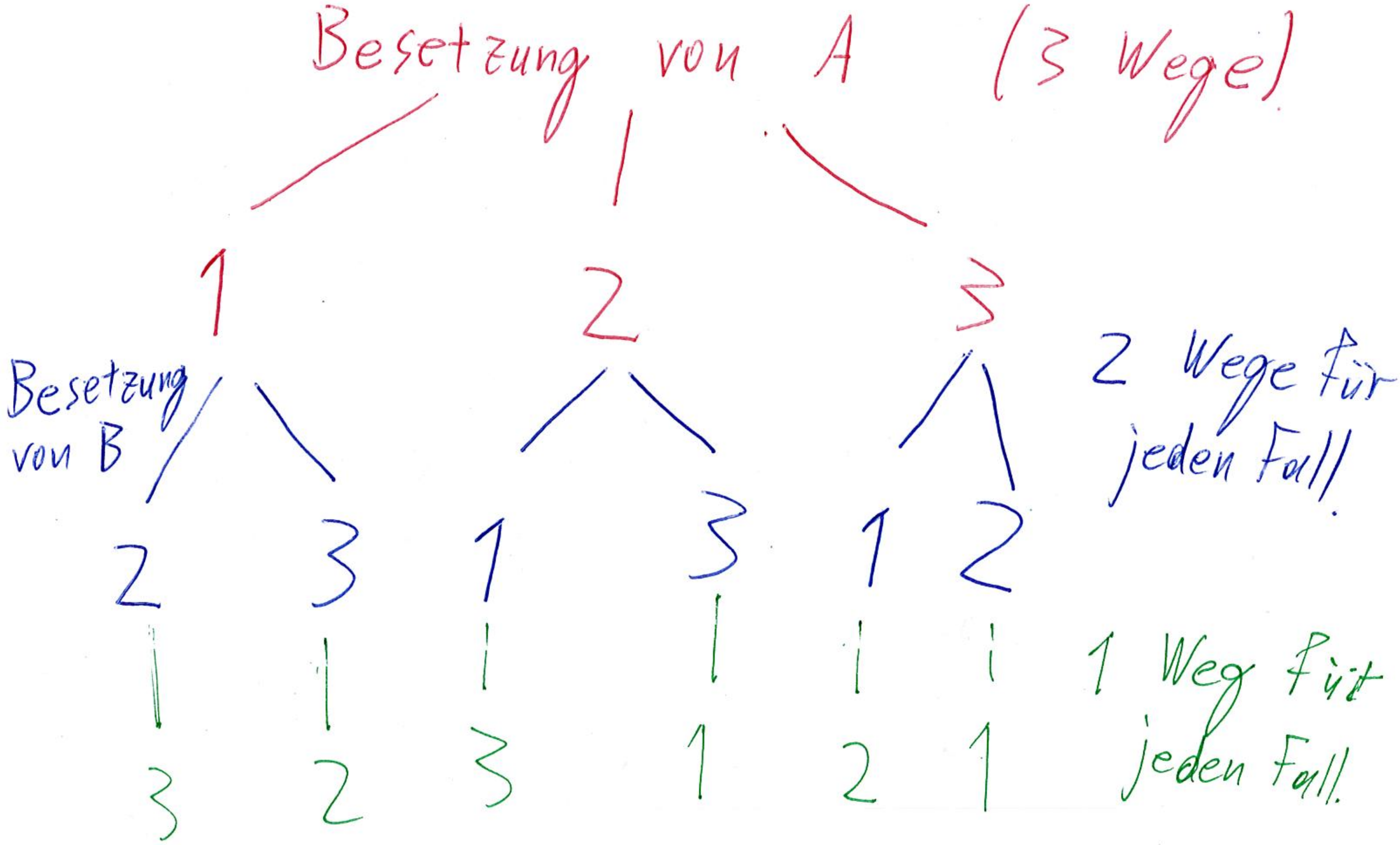
Frage: Wie viele Permutationen hat A_n.
Äquivalente Formulierung: Es gibt n Personen und n feste Stühle. In wie vielen Wegen können die n Personen in den Stühlen sich setzen? Antwort $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Beweisidee: Annahme: Erst wird der erste Stuhl besetzt dann der zweite usw. Der erste Stuhl kann in n Wegen besetzt werden. Danach der zweite in $n-1$ Wegen ($n-1$ übrige Personen). Der dritte in $n-2$ Wegen, ..., der k-te in $n-k+1$ Wegen

Insgesamt $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$

Illustration für $n=3$. Stühle A, B, C

Personen 1, 2, 3.



Insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Wege.

4.8 Binomialkoeffizienten.

Sei $A_n = \{1, \dots, n\}$. Wie viele Teilmengen mit k Elementen hat A_n. Antwort $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (n über k)

Bsp 4.8.1 $\binom{200}{2} = \frac{200!}{2!(200-2)!} = \frac{198! \cdot 199 \cdot 200}{2! \; 198!}$

$$= \frac{199 \cdot 200}{2}.$$

Beweisidee: Wir wählen k Elemente von A_n.

Es gibt n Wege ein 1es Element zu wählen

$n-1$ " " 2es " " "

⋮

$n-k+1$ " " k.es " " ".

Insgesamt $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Aber mit diesem Vorgehen wird jede Teilmenge mit k Elementen $k!$ Mal gewählt, weil sie $k!$ Permutationen hat.

Also es gibt $\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{k!} = \binom{n}{k}$ solche Teilmengen.

Bsp 4.8.2 $\{1,2,3,4,5\}$ hat $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{2!} = 10$ Teilmengen mit 2 Elementen.

und zwar $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}$.

4.9 **Binomialsatz**: Seien $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Dann $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Bsp 4.9.1 $(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k b^{4-k}$

$= \binom{4}{0} a^0 b^{4-0} + \binom{4}{1} a^1 b^{4-1} + \binom{4}{2} a^2 b^{4-2} + \binom{4}{3} a^3 b^{4-3} + \binom{4}{4} a^4 b^{4-4}$

$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + b^4$

da $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$, $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$ $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Beweisidee: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\ \ldots\ (a+b)}_{n \text{ Mal. } n \text{ Klammern}}$

Der Term $a^k b^{n-k}$ taucht auf wenn wir von den n Klammern k-Mal das a wählen. Es gibt aber $\binom{n}{k}$ Wege das zu machen.

Illustration mit Bsp 4.8.3.

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$a^2 b^{4-2}$ taucht auf, wenn wir 2 Mal das a wählen. Es gibt aber $\binom{4}{2} = 6$ Wege das zu machen.

Bernoullische Ungleichung

Sei $x \geq -1$. Dann $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: (IA) Für $n=1$ $(1+x)^1 = 1+x = 1+1\cdot x$ also stimmt die Aussage.

(IS) Induktionsannahme: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad (*)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest).

z.z. $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. In der Tat.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{(*)}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

und weil $1+x \geq 0$

$$= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

was zu zeigen war. Also stimmt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aus der Bernoullische Ungleichung folgt.

(1) Wenn $a \in (1,\infty)$ und $K>0$, dann $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$.

(2) Wenn $a \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ dann $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.

Beweis: (1) $a^n = (1+(a-1))^n \geq 1 + n(a-1)$ (**)

Bernoullisshe Ungleichung

Aber Satz 9.2 $\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{K}{a-1}$ (***)

Also $a^n \overset{(**)}{\geq} 1 + n(a-1) \underset{\text{da } a-1>0}{\overset{(***)}{\geq}} 1 + \frac{K}{a-1}(a-1) = 1+K > K$.

---

(2) $a \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{a} \in (1,\infty)$. Da $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ gibt es wegen (1) n mit $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$$\frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\text{multiplizieren}]{\text{mit } a^n\varepsilon > 0} \varepsilon > a^n.$$

was zu zeigen war.