4.10 Wurzeln.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$. Dann gibt es ein $b > 0$, so dass $b^n = a$, und b heißt n-te Weitzel von a $b = \sqrt[n]{a}$.

Bsp 4.10.1 $\sqrt[6]{64} = 2$, weil $2 > 0$ und $2^6 = 64$.

(1) Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ dann

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}.$$

(2) Seien $a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

(i) $a \leq b \Leftrightarrow a^n \leq b^n$.

(ii) $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$.

Beweis: (1.) Übung. 2(i) Folgt aus (1)

weil $a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}}_{\geq 0}$ also

$$a^n - b^n \geq 0 \Leftrightarrow a - b \geq 0.$$

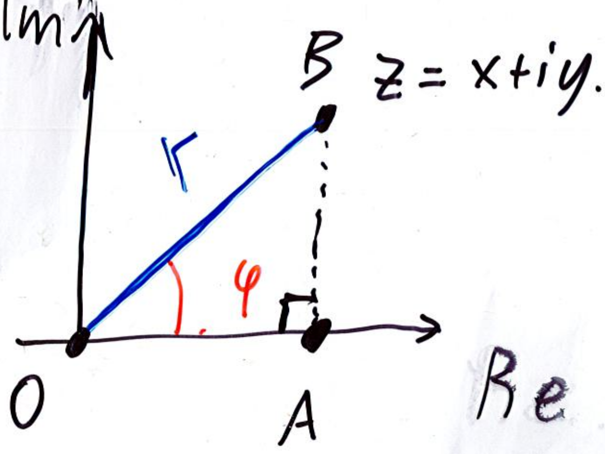
2(ii) Folgt aus 2(i) weil

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \overset{2(i)}{\Longleftrightarrow} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \leq \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \Leftrightarrow a \leq b.$$

5 Mehr über die komplexen Zahlen

Polarkoordinaten und Eulersche Formel.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$.



Sei $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und φ Winkel zur positiven x-Achse.

Dann.

$$x = OA = OB\cos\varphi = r\cos\varphi = |z|\cos\varphi$$

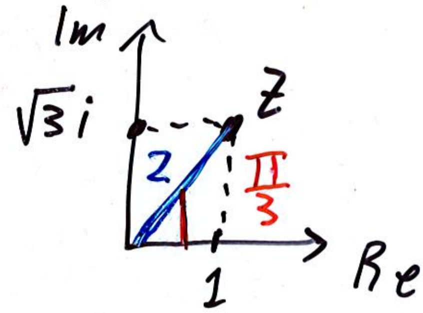
ähnlich $y = r\sin\varphi = |z|\sin\varphi$.

Eulersche Formel $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Wegen der Polardarstellung und der Eulerschen Formel kann man schreiben

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

Bsp 5.1.1



Sei $z = 1 + \sqrt{3}\,i$. $z^{40} = ?$

Dann $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Also $z = 2\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}} + \underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{3}}\, i\Big)$.

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Also $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z^{40} = 2^{40}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{40}$

$\Rightarrow z^{40} = 2^{40} e^{i\frac{40\pi}{3}}$ (1)

Aber $e^{i\frac{40}{3}\pi} = e^{i\frac{36}{3}\pi} e^{i\frac{4}{3}\pi} = e^{i12\pi} e^{i\frac{4}{3}\pi}$ (2)

Aber $e^{i12\pi} = \cos(12\pi) + i\sin(12\pi) \xrightarrow[2\pi\text{-periodisch}]{\cos,\ \sin}$

$= \cos(0) + i\sin(0) = 1.$ (3)

(2),(3) $\Rightarrow e^{i\frac{40}{3}\pi} = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right).$

$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad e^{i\frac{40}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4)

(1),(4) $\Rightarrow \quad z^{40} = 2^{40}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow z^{40} = -2^{39}\left(1 + i\sqrt{3}\right).$

5.1 Polynome : Funktionen $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

mit $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$.
mit $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $a_j \in \mathbb{C}$
$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. p heißt <u>reell</u> wenn
$a_j \in \mathbb{R} \ \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Wenn $a_n \neq 0$
sagt man p ist <u>vom Grad n</u> ($n = \text{Grad}\, p$)

wenn $p = a_0$ $\to$ Grad $p = 0$, wenn $a_0 \neq 0$
$\to$ Grad p nicht definiert wenn $a_0 = 0$.

$z_0 \in \mathbb{C}$ heißt <u>Nullstelle</u> von p, wenn $p(z_0) = 0$.

<u>Bsp 5.1.2</u> $p(z) = i z^2 + z + (1 - i)$
ist Polynom vom Grad 2
$p(-1) = i(-1)^2 - 1 + 1 - i = i - i = 0$
also ist -1 Nullstelle von p.

5.4 Die Gleichung $z^n = c$, $c \in \mathbb{C}$

kann man lösen, wenn man c in Polarkoordinaten schreibt und benutzt

Satz 5.2 $z^n = re^{i\varphi}$ (*) hat die Lösungen

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{2\pi k+\varphi}{n}\right)}, \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Bsp 5.4.1 Lösen Sie die Gleichung $z^4 = 1+\sqrt{3}i$.

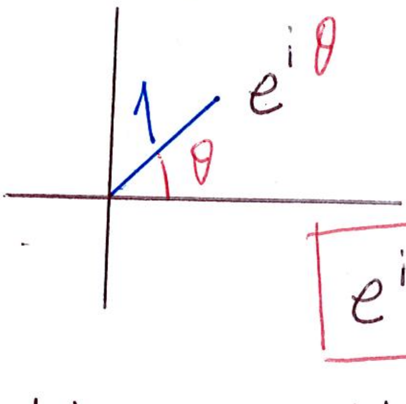
Lö: Aus Bsp 5.1.1 $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Also mit Anwendung des Satzes 5.2 bekommen wir die Lösungen $z_k = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{2\pi k+\frac{\pi}{3}}{4}\right)}$, $k=0,1,2,3$.

Also $z_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $z_2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{13\pi}{12}}$, $z_3 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{19\pi}{12}}$

Beweisidee des Satzes 5.2 $(z_k)^n = \left[r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{2\pi k+\varphi}{n}\right)}\right]^n$

$$= re^{i2\pi k + i\varphi} = re^{i\varphi}\underbrace{e^{i2\pi k}} = re^{i\varphi}$$

$$\underbrace{\cos(2\pi k)}_{=1} + i\underbrace{\sin(2\pi k)}_{=0} = 1$$



$$\boxed{e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \quad (1)}$$

Also z_k löst (*) $\forall$ $k=0,\dots,n-1$ und (*) hat höchstens n Lösungen wegen der Folgerung 5.2. Also, reicht es zu zeigen dass z_k, $k=0,\dots,n-1$ unterschiedlich sind. Das kann man mit Hilfe von (1) zeigen.